2021年北京市高等教育教学成果奖
成果总结和支撑材料

成果名称：多维联动融合的线性代数混合式金课建设和实践

成果完成人：崔丽鸿、姜广峰、姜冬青、赵中华、周冬梅、

苏贵福、郭威力

成果完成单位：北京化工大学

（1）北京市教学名师奖（2021年），崔丽鸿；

（2）北京高等学校优秀公共课主讲教师(2019年)，崔丽鸿；

（3）首届北京高校大学数学课程教学创新示范交流活动二等奖（2021年），崔丽鸿，姜冬青，赵中华，郭威力；

（4）北京市高等教育教学成果二等奖（2017年），崔丽鸿等；

（5）北京高校优质本科课程，线性代数（2019年），崔丽鸿；

（6）北京高校继续教育高水平教学团队工程数学课群教学团队（2019年），崔丽鸿等；

（7）教育部在线研究中心“拓金计划”首批示范课程，矩阵论及其应用（2021年），崔丽鸿，赵中华，李季；

（8）北京高校优质本科教材课件，线性代数（2020年），姜广峰，崔丽鸿；

（9）北京市精品课程，线性代数（2005年），姜广峰；

（10）北京市教学名师奖，（2008年），姜广峰；

（11）北京市优秀教育工作者（2017年），姜广峰；

（12）政府特殊津贴，（2019年），姜广峰；

（13）北京市优秀教学团队，团队带头人（2008年），姜广峰；

（14）北京高校数学微课程教学设计竞赛一等奖（2015 年），苏贵福；

（15）全国高校数学微课程教学设计竞赛华北赛区一等奖（2015），苏贵福；

（16）第二届全国高校微课教学比赛北京市三等奖（2015），苏贵福；

（17）全国高校数学微课程教学设计竞赛华北赛区二等奖（2019），苏贵福；

（18）北京高校数学微课程教学设计竞赛二等奖（2019），苏贵福；

（19）校级优秀教学成果特等奖（2016 年），崔丽鸿等；

（20）校级优秀教育教学成果一等奖（2020 年），崔丽鸿等；

（21）校级在线教学示范课程，线性代数（2020 年），崔丽鸿等；

（22）校级课程思政示范课程，线性代数（2019 年），崔丽鸿等；

（23）校级课程思政示范课程，矩阵论及应用（2020 年），崔丽鸿等;；

（24）校级课程思政优秀教学案例一等奖（2020 年），崔丽鸿；

（25）校级优秀教材特等奖，线性代数（2020 年），姜广峰，崔丽鸿

（26）校级十佳教师奖（2010,2017,2019 年），崔丽鸿；

（27）校级优秀一线教师（2010,2017,2019 年），崔丽鸿；

（28） 校级课程思政优秀教学案例一等奖（2020 年），赵中华。

2. 教改项目清单及部分结题意见截图（列出 13 项） ....16-22 页

（1）教育部大学数学课程教学指导委员会项目

1）面向新工科的大学数学基础课程体系构建----以部分工科优势高校为例，2019-01 至 2020-12，姜广峰主持

2）大学数学课程质量评价指标研究与数据发布，2019-2020，姜广峰主持

3）基于 MOOC 与智慧教学下，大学数学课程教学模式、教学方法、学习过程评价方法的研究与实践，2019-01 至 2020-12，崔丽鸿主持，结题为优秀

4）新媒介环境下《线性代数》课程教学中培养学生创新思维和能力的研究实践 2015-11 至 2017-08，崔丽鸿主持

5）高水平特色行业型大学《线性代数》课程数字化资源建设，2013-12 至 2015-08，姜广峰主持

6) 新时代大学数学系列新形态教材范式研究与应用研究，2021-07 至 2023-06，崔丽鸿主持

（2）中国高等教育学会项目

7）“双一流”背景下高水平教师队伍建设的机制体制创新研究， 2018-2020，姜广峰主持

（3）北京市教委项目

8）线性代数优质本科课程，人才培养共建项目，2020-12 至 2020-12，崔丽鸿主持

9）析数悟理、思政立德—在数理公共基础课群中融入课程思政的探索与实践，2020-08 至 2022-08，邵晓红主持，姜广峰排名第 2，崔丽鸿排名 6。

（4）教育部在线教育研究中心

10）线性代数混合式教学试点项目，2017-09 至 2019-08，崔丽鸿主持

（5）高等教育出版设项目

11）线性代数课程的数字化资源建设，2016-12 至 2017-12，崔丽鸿主持

12）线性代数在线测评系统建设，2017-01 至 2019-8，崔丽鸿参与

3. 出版的教材清单及佐证（列出 6 项） ....23-27 页

（1）姜广峰、崔丽鸿主编：《线性代数》，高等教育出版社，2015 年

（2）崔丽鸿、姜广峰：《线性代数导学备考一书通》，化学工业出版社，2011 年

（3）姜广峰，崔丽鸿，线性代数难点剖析与和典型例题讲解，高等教育出版社 高等教育电子音像出版社，2018 年。

（4）彭建华主编，崔丽鸿等参编：《线性代数典型题解析及自测试题》，西北工业大学出版社，2000 年

（5）杨永愉、李秋姝、崔丽鸿：《高等数学学习辅导》，化学工业出版社，2007 年。

（6）刘渭川、龙洪波主编，崔丽鸿等副主编：《高等数学概念释义与错解辨析》，武汉工业大学出版社，1995 年。

4. 自主建设的在线课程清单及网址（列出 4 项） ....28 页

（1）《线性代数典型习题讲解》MOOC 课程，在爱课程平台运行 7 期；

网址：https://www.icourse163.org/course/BUCT-1002607035

（2）《线性代数》优慕课课程，在北化在线运行 4 期；

网址：https://course-proxy2.buct.edu.cn/meol/index.do

（3）《矩阵论及其应用》MOOC 课程，在学堂在线运行 3 期；

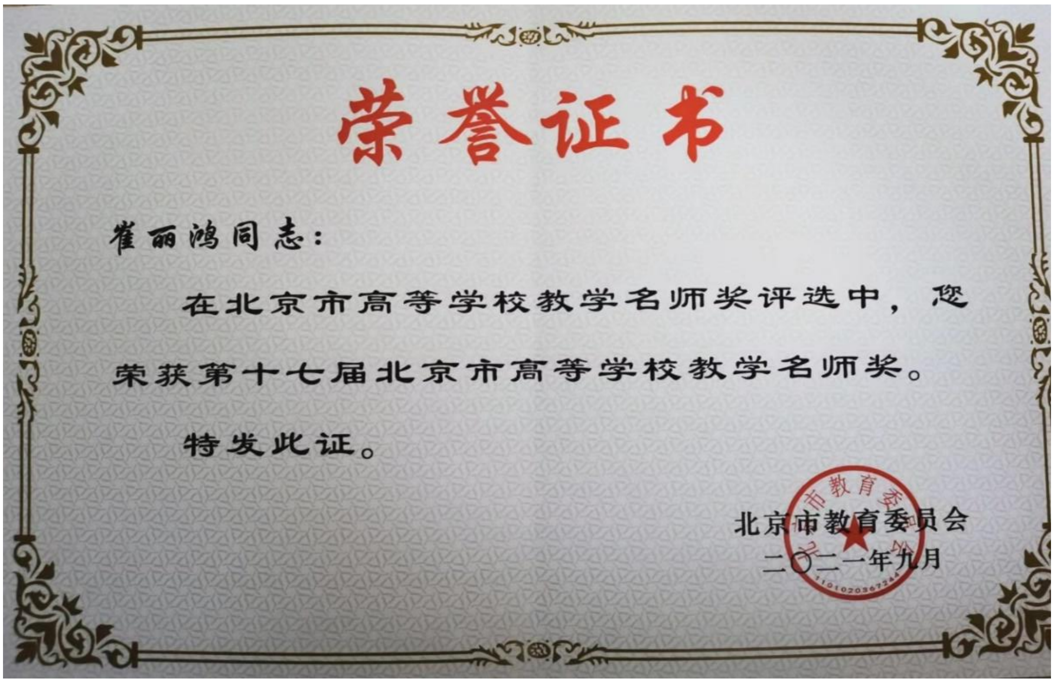
网址：https://www.xuetangx.com/course/SDDXP0854003501/7770016

（4）线性代数 MOOC 课程等待上线中。

网址：https://www.icourse163.org/course/BUCT-1002602034?tid=1002790094

■支撑材料

1. 课程和教学成果、教学荣誉获奖清单及证书或截图（列出 28 项）



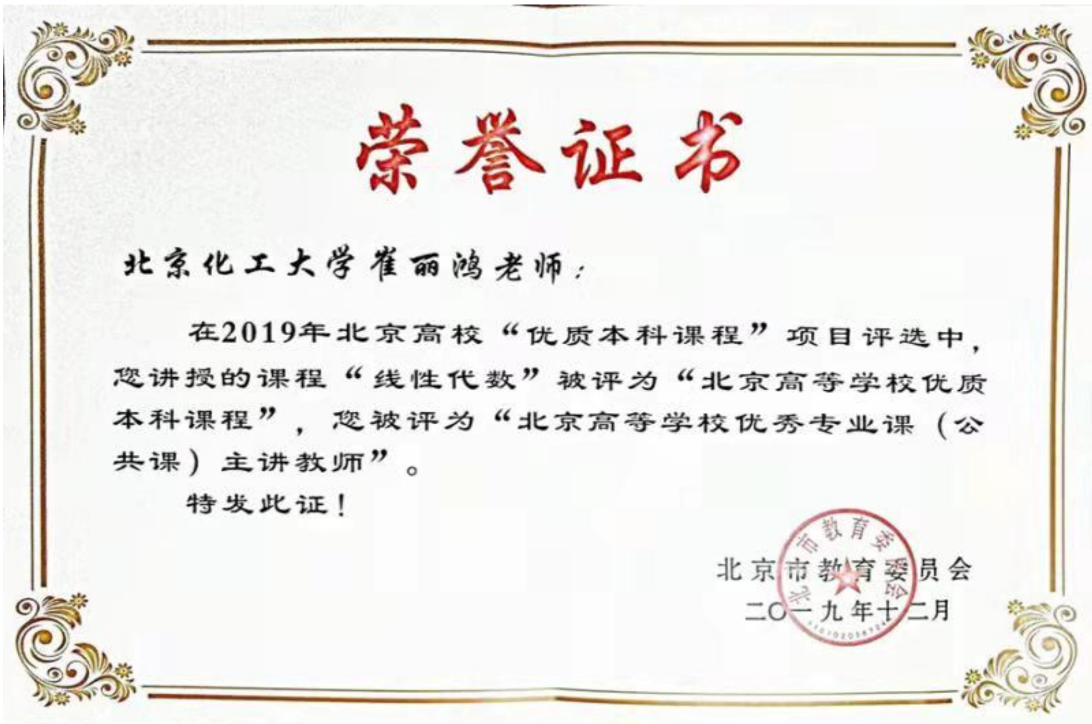
荣誉证书

崔丽鸿同志：

在北京市高等学校教学名师奖评选中，您荣获第十七届北京市高等学校教学名师奖。

特发此证。

北京市教育委员会
二〇二一年九月



荣誉证书

北京化工大学崔丽鸿老师：

在2019年北京高校“优质本科课程”项目评选中，您讲授的课程“线性代数”被评为“北京高等学校优质本科课程”，您被评为“北京高等学校优秀专业课（公共课）主讲教师”。

特发此证！

北京市教育委员会
二〇一九年十二月

荣誉证书

北京化工大学

崔丽鸿 姜冬青 赵中华 郭威力

荣获首届北京高校大学数学课程教学创新示范交流活动

二等奖

北京高校大学数学课程教学创新示范交流活动组委会

北京市教育委员会高教处

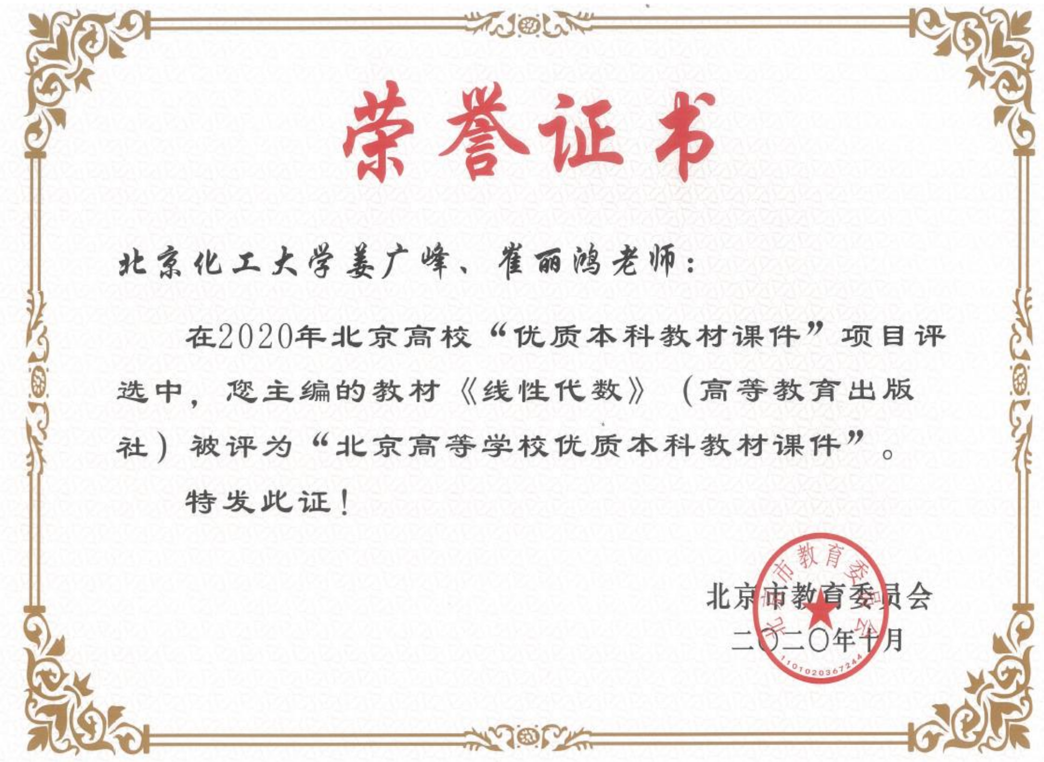
二〇二一年八月

荣誉证书

崔丽鸿 姜广峰 江新华 苏贵福 熊保林：

互联网+背景下，深化信息技术与工程数学课群融合的教学改革与实践，获 2017 年北京市高等教育教学成果奖二等奖。

二〇一八年四月



荣誉证书

北京化工大学姜广峰、崔丽鸿老师：

在2020年北京高校“优质本科教材课件”项目评选中，您主编的教材《线性代数》（高等教育出版社）被评为“北京高等学校优质本科教材课件”。

特发此证！

北京市教育委员会

二〇二〇年十月

“拓金计划”示范课程

证书

课程名称：矩阵论及其应用

课程负责人：崔丽鸿 赵中华 李季

建设学校：北京化工大学

教育部在线教育研究中心秘书处

（清华大学教务处代章）

2021年7月

附件 1

2019 年本科课程思政示范课名单

序号	学院名称	课程名称	课程主讲人
1	化学工程学院	环境工程监测	张婷婷
2	化学工程学院	生命科学导论	陈畅
3	材料科学与工程学院	材料导论双语	赵静
4	信息科学与技术学院	大学计算机	卢罡
5	经济管理学院	项目管理	吴卫红
6	化学学院	有机化学	许家喜
7	化学学院	物理化学	白守礼
8	数理学院	线性代数	崔丽鸿
9	文法学院	民法 I	李超
10	生命科学与技术学院	微生物学	陈龙

北化大校教发〔2020〕29 号

北京化工大学关于公布在线教学示范课评选结果的通知

各学院：

为贯彻落实党中央、国务院以及教育部、北京市委市政府的决策部署，学校制定了《北京化工大学关于在新型冠状病毒感染肺炎疫情防控期间做好本科生在线教学组织与管理工作的实施方案》。为进一步激励广大教师在线教学工作热情，充分发挥在线教学期间优秀课程示范作用，学校组织开展在线教学示范课评选，经教师资源申报、学院推荐、学校组织校内外专家评审，共评选出在线教学示范课 20 门，具体名单如下：

				MAT13805T
15	数理学院	崔丽鸿	线性代数	MAT11401T MAT11501T
16	文法学院	和育东	知识产权法概论	LAW34403T
17	文法学院	田英涛	大学英语 II	ENG11401T
18	生命学院	梁 浩	制药分离工程	PME44200T

北京化工大学 2020 年度研究生

课程思政

荣誉证书

HONORARY CERTIFICATE

崔丽鸿 老师：

您负责的课程《矩阵论及其应用》，获得北京化工大学 2020 年度研究生“课程思政”示范课程荣誉称号。

特发此证，以资鼓励。

北京化工大学研究生院

2020 年 11 月 29 月

北京化工大学 2020 年度研究生

课程思政

荣誉证书

HONORARY CERTIFICATE

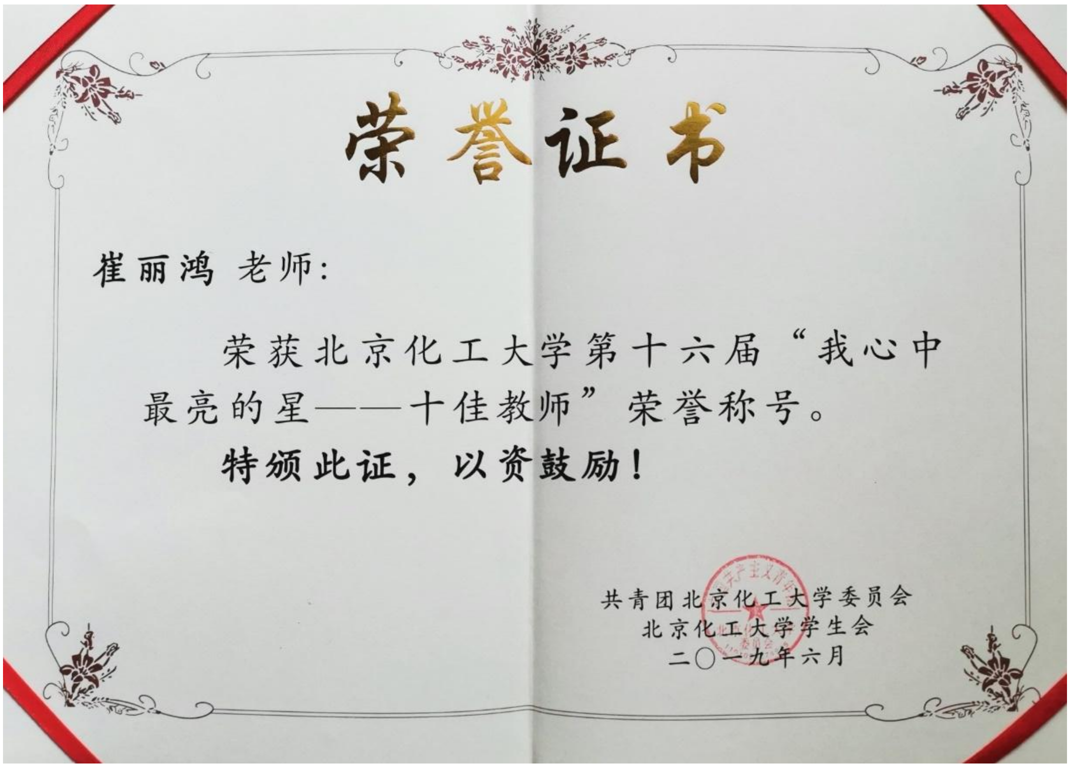
崔丽鸿 老师：

您负责的《矩阵论及其应用》课程中案例《广义逆矩阵与解密》，获得北京化工大学 2020 年度研究生“课程思政”优秀案例荣誉称号。

特发此证，以资鼓励。

北京化工大学研究生院

2020 年 11 月 29 月



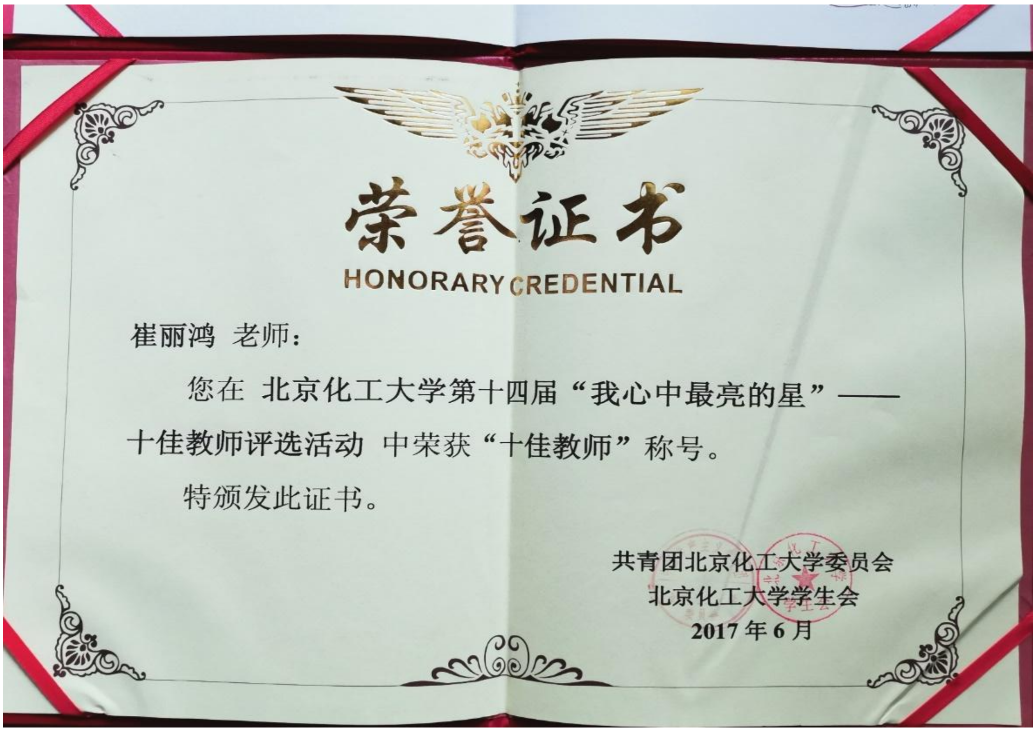
荣誉证书

崔丽鸿 老师：

荣获北京化工大学第十六届“我心中最亮的星——十佳教师”荣誉称号。

特颁此证，以资鼓励！

共青团北京化工大学委员会
北京化工大学学生会
二〇一九年六月



荣誉证书
HONORARY CREDENTIAL

崔丽鸿 老师：

您在 北京化工大学第十四届“我心中最亮的星”——十佳教师评选活动 中荣获“十佳教师”称号。

特颁发此证书。

共青团北京化工大学委员会
北京化工大学学生会
2017 年 6 月


教师节展板90X120-2.pdf
庆新中国
70华诞
展新时代
教师风采
优秀一线教师（2018）：杨丰梅、钱　皓、许苏英、崔丽鸿、李相元、王　璇、张文芝、孙　芳、刘丽英、张　娅、董晓倩、李增和、冯拥军、刘　伟、丁小红
杨丰梅 - 数理学院 主要讲授课程：《高等数学》
钱　皓 - 机电工程学院 主要讲授课程：《设计美学》、《工业设计史》、《广告创意设计》
许 化学学院 主要讲授课程：《 《纳米技术与生物医药》、《生物分子功能及合成》
崔丽鸿 - 数理学院 主要讲授课程：《线性代数》
材料科学与工程学院 主要讲授课程 验》
王　璇 - 经济管理学院 主要讲授课程：《物流信息技术》、《企业资源管理沙盘模拟》
张文芝 - 材料科学与工程学院本科教学秘书
孙　芳 - 化学学院 主要讲授课程：《有机化学和药物合成化学进展》
刘丽英 - 化学工程学院 主要讲授课程：《化工原理》系列课程
张　娅 - 机电工程学院 主要讲授课程：《理论力学》、《材料力学》、《实验应力分析》
董晓倩 - 文法学院 主要讲授课程：《公共政策案例分析》、《市政学》
李增和 - 化学学院 主要讲授课程：《分析化学》、《环境分析》
冯拥军 - 化学学院 主要讲授课程：《大化实验》、《产品工程》、《应用化学前沿》、《化学产品设计与工程》
刘　伟 - 化学工程学院 主要讲授课程：《化工原理》系列课程
丁小红 - 文法学院 主要讲授课程：《健美操副项（I）(II)》、《体育社会学》、《体育课程与教学论》

证书

Certificate

北京化工大学

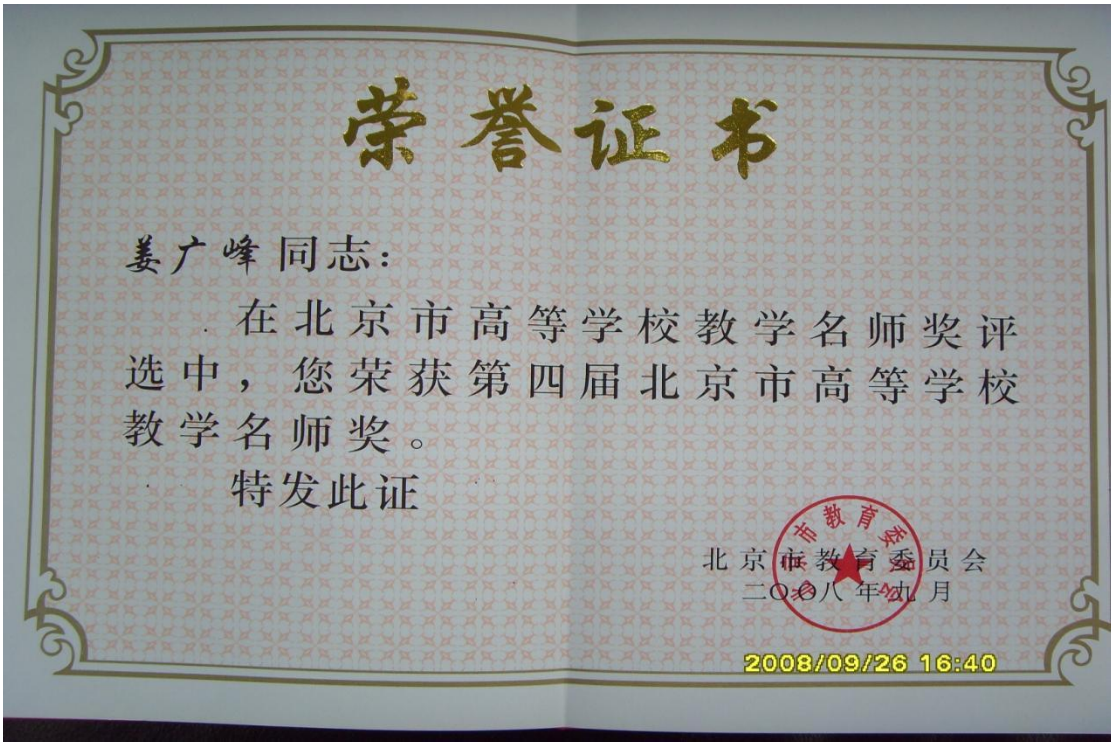
你校《线性代数》课程（课程负责人：姜广峰），在2005年度北京高等学校精品课程评选中被评为北京市精品课程。

特发此证。

证书编号：2005026

北京市教育委员会

Beijing Municipal Education Commission



荣誉证书

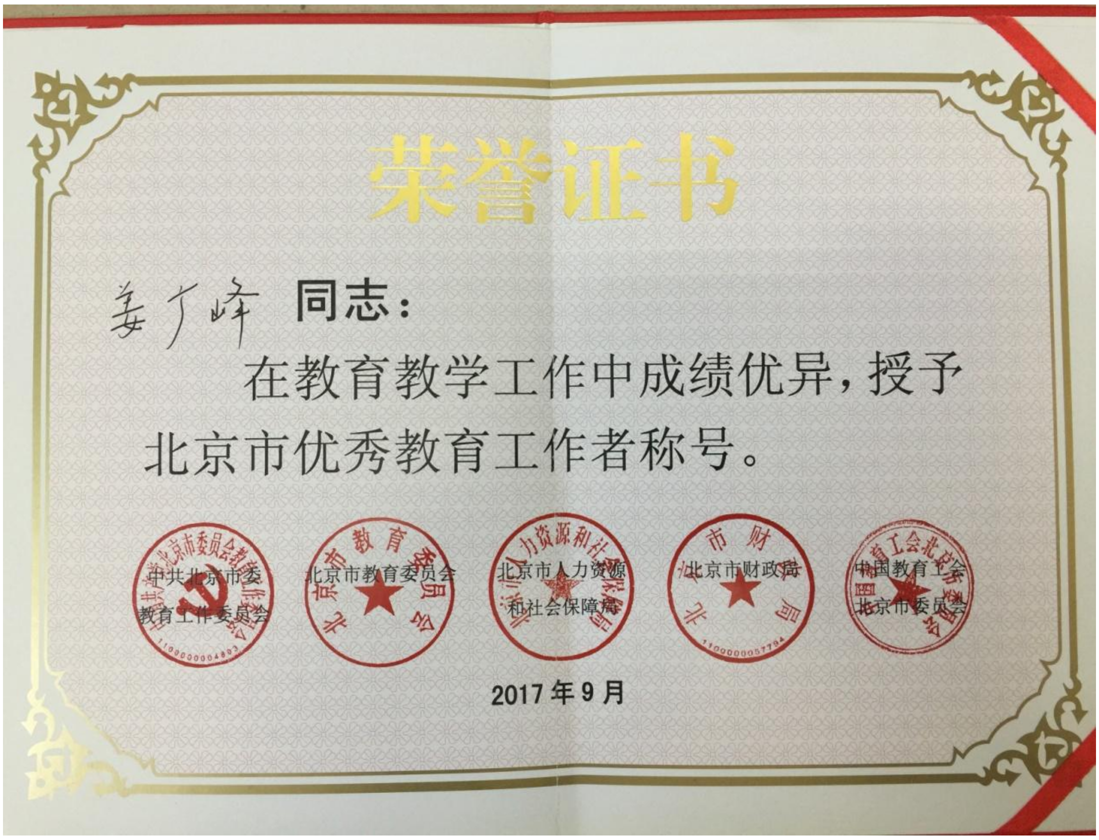
姜广峰同志：

在北京市高等学校教学名师奖评选中，您荣获第四届北京市高等学校教学名师奖。

特发此证

北京市教育委员会

二〇〇八年九月



荣誉证书

姜广峰 同志：

在教育教学工作中成绩优异，授予北京市优秀教育工作者称号。

中共北京市委教育工作委员会　北京市教育委员会　北京市人力资源和社会保障局　北京市财政局　中国教育工会北京市委员会

2017年9月

证　书

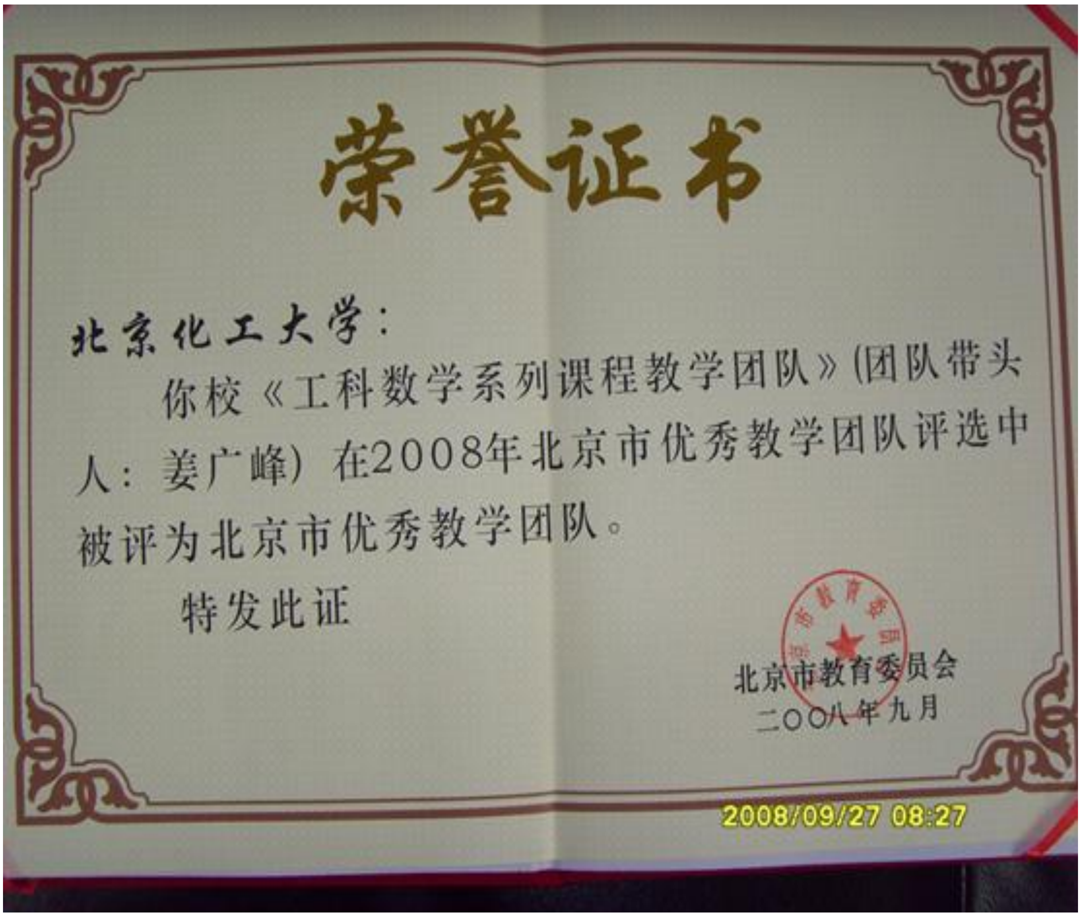
姜广峰 同志：

为了表彰您为发展我国自然科学教学事业做出的突出贡献，特决定发给政府特殊津贴并颁发证书。

中华人民共和国国务院

政府特殊津贴第 2018182069号

2019 年 01 月 16 日


荣誉证书
北京化工大学：
你校《工科数学系列课程教学团队》(团队带头人：姜广峰) 在2008年北京市优秀教学团队评选中被评为北京市优秀教学团队。
特发此证
北京市教育委员会
二〇〇八年九月
2008/09/27 08:27


北京高校数学微课程教学设计竞赛
Mathematical Micro-lecture Competition for Higher Education in Beijing
北京化工大学
苏贵福
荣获首届（2015）北京高校数学微课程教学设计竞赛
一等奖
北京高校数学微课程教学设计竞赛组委会
北京市教育委员会高教处
五年八月

全国高校数学微课程教学设计竞赛

Mathematical Micro-lecture Competition for Higher Education

北京化工大学

苏贵福

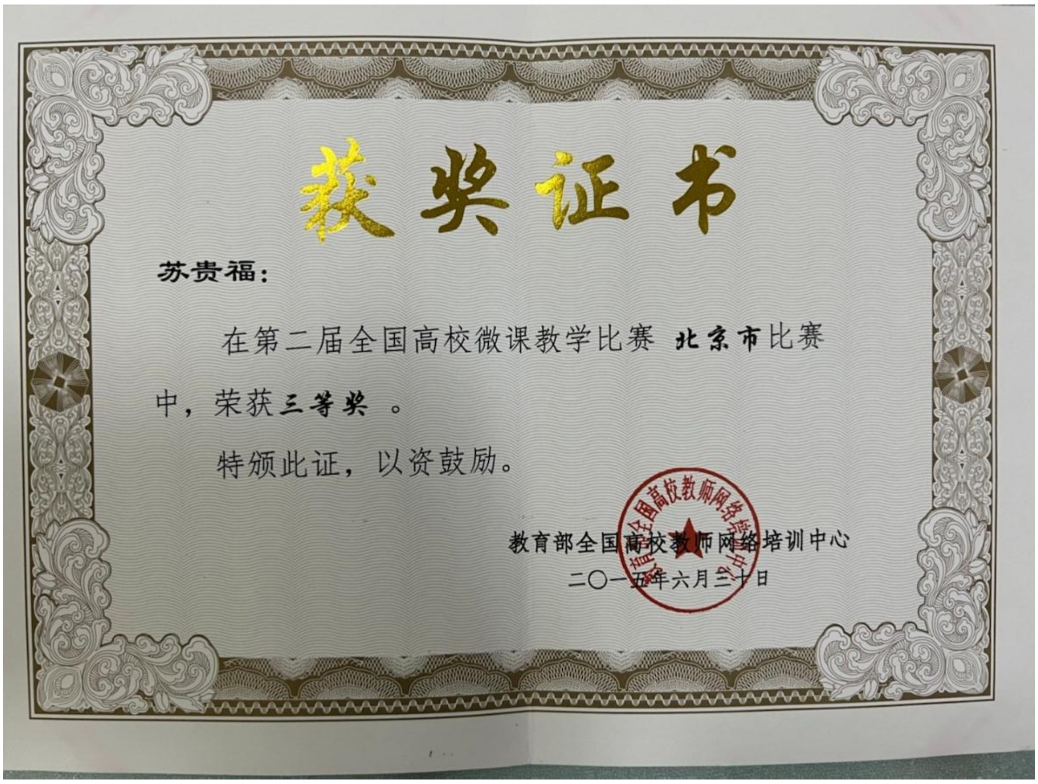
荣获首届（2015）全国高校数学微课程教学设计竞赛华北赛区一等奖。

教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会

全国高等学校数学研究中心

高等学校大学数学教学研究与发展中心

二〇一五年八月



获奖证书

苏贵福：

在第二届全国高校微课教学比赛 北京市比赛中，荣获三等奖 。

特颁此证，以资鼓励。

教育部全国高校教师网络培训中心

二〇一五年六月三十日


全国高校数学微课程教学设计竞赛

Mathematical Micro-lecture Competition for Higher Education

编号：MMC2019-NC-S-013

北京化工大学

苏贵福

荣获第五届（2019）全国高校数学微课程教学设计竞赛

华北赛区二等奖。

教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会

高等学校大学数学教学研究与发展中心

二〇一九年八月


北京高校数学微课程教学设计竞赛

Mathematical Micro-lecture Competition for Higher Education in Beijing

北京化工大学

苏贵福

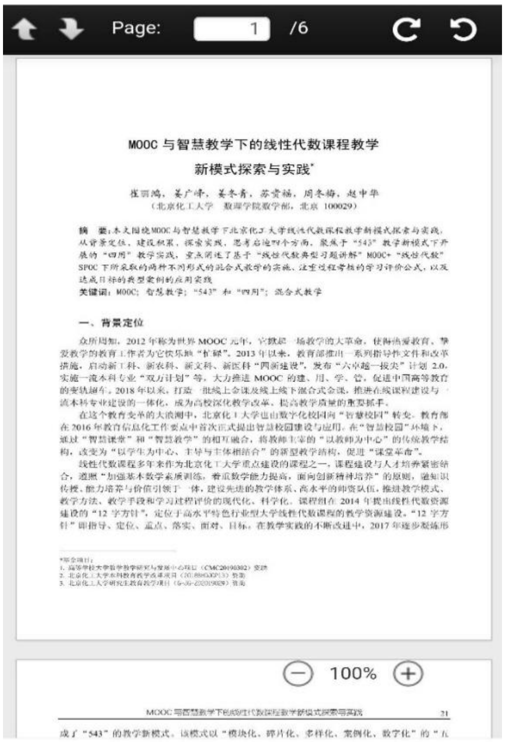
荣获第五届（2019）北京高校数学微课程教学设计竞赛

二等奖

北京市教育委员会

二〇一九年八月

006



Page: 1 /6

MOOC 与智慧教学下的线性代数课程教学

新模式探索与实践*

崔丽鸿，姜广峰，姜冬青，苏贵福，周冬梅，赵中华

（北京化工大学 数理学院数学部，北京 100029）

摘 要：本文围绕MOOC与智慧教学下北京化工大学线性代数课程教学新模式探索与实践，从背景定位、建设积累、探索实践、思考启迪四个方面，聚焦于“543”教学新模式下开展的“四用”教学实践，重点阐述了基于“线性代数典型习题讲解”MOOC+“线性代数”SPOC下所采取的两种不同形式的混合式教学的实施、注重过程考核的学习评价公式，以及达成目标的典型案例的应用实践

关键词：MOOC；智慧教学；“543”和“四用”；混合式教学

一、背景定位

众所周知，2012年称为世界MOOC元年，它掀起一场教学的大革命，使得热爱教育、挚爱教学的教育工作者为它快乐地“忙碌”。2013年以来，教育部推出一系列指导性文件和改革措施，启动新工科、新农科、新文科、新医科“四新建设”，发布“六卓越一拔尖”计划2.0，实施一流本科专业“双万计划”等，大力推进MOOC的建、用、学、管，促进中国高等教育的变轨超车。2018年以来，打造一批线上金课及线上线下混合式金课，推进在线课程建设与一流本科专业建设的一体化，成为高校深化教学改革、提高教学质量的重要抓手。

在这个教育变革的大浪潮中，北京化工大学也由数字化校园向“智慧校园”转变。教育部在2016年教育信息化工作要点中首次正式提出智慧校园建设与应用。在“智慧校园”环境下，通过“智慧课堂”和“智慧教学”的相互融合，将教师主宰的“以教师为中心”的传统教学结构，改变为“以学生为中心、主导与主体相结合”的新型教学结构，促进“课堂革命”。

线性代数课程多年来作为北京化工大学重点建设的课程之一，课程建设与人才培养紧密结合，遵照“加强基本数学素质训练，着重数学能力提高，面向创新精神培养”的原则，融知识传授、能力培养与价值引领于一体，建设先进的教学体系、高水平的师资队伍，推进教学模式、教学方法、教学手段和学习过程评价的现代化、科学化。课程组在2014年提出线性代数资源建设的“12字方针”，定位于高水平特色行业型大学线性代数课程的教学资源建设。“12字方针”即指导、定位、重点、落实、面对、目标。在教学实践的不断改进中，2017年逐步凝练形

*基金项目：
1. 高等学校大学数学教学研究与发展中心项目（CMC20190302）资助
2. 北京化工大学本科教育教学改革项目（2018BHDJGP13）资助
3. 北京化工大学研究生教育教学项目（G-JG-20201902?）资助

100%

MOOC 与智慧教学下的线性代数课程教学新模式探索与实践 21

成了“543”的教学新模式，该模式以“模块化、碎片化、多样化、案例化、数字化”的“五

荣誉证书

崔丽鸿 同志：

被评为2014、2015年度北京化工大学“巾帼建功”先进个人

特此表彰

北京化工大学工会委员会

二〇一六年三月七日

2. 教改项目清单及部分结题截图

形成了一批教学研究和改革项目并获得高度评价。

（1）教育部大学数学课程教学指导委员会项目

1）面向新工科的大学数学基础课程体系构建----以部分工科优势高校为例，2019-01 至 2020-12，姜广峰主持

2）大学数学课程质量评价指标研究与数据发布，2019-2020，姜广峰主持

3）基于 MOOC 与智慧教学下，大学数学课程教学模式、教学方法、学习过程评价方法的研究与实践，2019-01 至 2020-12，崔丽鸿主持，结题为优秀

4）新媒介环境下《线性代数》课程教学中培养学生创新思维和能力的研究实践 2015-11 至 2017-08，崔丽鸿主持

5）高水平特色行业型大学《线性代数》课程数字化资源建设，2013-12 至 2015-08，姜广峰主持

6) 新时代大学数学系列新形态教材范式研究与应用研究，2021-07 至 2023-06，崔丽鸿主持

（2）中国高等教育学会项目

7）“双一流”背景下高水平教师队伍建设的机制体制创新研究， 2018-2020，姜广峰主持

（3）北京市教委项目

8）线性代数优质本科课程，人才培养共建项目，2020-12 至 2020-12，崔丽鸿主

9）析数悟理、思政立德—在数理公共基础课群中融入课程思政的探索与实践，2020-08 至 2022-08，邵晓红主持，姜广峰排名第 2，崔丽鸿排名第 6。

（4）教育部在线教育研究中心

10）线性代数混合式教学试点项目，2017-09 至 2019-08，崔丽鸿主持

（5）高等教育出版设项目

11）线性代数课程的数字化资源建设，2016-12 至 2017-12，崔丽鸿主持

12）线性代数在线测评系统建设，2017-01 至 2019-8，崔丽鸿参与

部分相关图片

高等学校大学数学教学研究与发展中心

首页 中心概况 新闻动态 教学改革 交流培训 中心简报 资料下载 中

2019年高等学校大学数学教学研究与发展中心教学改革项目立项结果公告

2019年高等学校大学数学教学研究与发展中心（简称“中心”）教学改革项目指南于2018年在西安召开的学术委员会第十次工作会议上讨论通过，于2018年12月1日在第十四届“大学数学课程报告论坛”（高校数学课程教学系列报告会）上发布，后经邮件及网站形式向全国高校发出公告。截至2018年12月31日，共收到申报书146份（不含约请项目）。中心组织专家讨论评审，根据择优选择立项的原则，确定中心2019年共立项39项，预立项2项，立项目信息如下：

一、适应新工科人才需求的大学数学课程体系重构与教学内容重组的研究和实践

此类项目是中心2017年立项项目类型一“新工科背景下大学数学课程体系重构与教学内容改革的研究和实践”的延续。

二、大学数学课程质量评价指标研究与数据发布

项目经费：每项1.2万元，共计3.6万元

项目研究期限：2019.1—2020.12

序号	项目编号	项目名称	学校	负责人
1	CMC20190201	大学数学课程质量评价指标研究与数据发布	北京物资学院	许晓革
2	CMC20190202	大学数学课程质量评价指标研究与数据发布	北京化工大学	姜广峰
3	CMC20190203	大学数学课程质量评价指标研究与数据发布	西安交通大学	李继成

高等学校大学数学教学研究与发展中心

项目经费：每项 1.1 万元，共计 20.9 万元

项目研究期限：2019.1—2020.12

序号	项目编号	项目名称	学校	负责人
1	CMC20190301	在线教育环境下，地方特色院校《高等数学》课程教学模式、教学方法、学习过程评价方法的研究与实践	北京服装学院	章江华
2	CMC20190302	基于 MOOC 与智慧教学下，大学数学课程教学模式、教学方法、学习过程评价方法的研究与实践	北京化工大学	崔丽鸿
3	CMC20190303	在线教育模式下，高等数学课程教学模式、教学方法、学习过程评价方法的研	北京邮电大学	李鹤

说明：各项目结题时提交的相关成果（如教材、视频课程、成果报告等）需标明“受高等学校大学数学教学研究与发展中心”资助，否则不予作为结题成果，所有项目成果将在中心主页展示。

教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会（主任单位代章）

2019 年 3 月 20 日

高等学校大学数学教学研究与发展中心

2019 年 3 月 20 日

高等学校大学数学教学研究与发展中心

高等学校大学数学教学研究与发展中心项目

结题鉴定意见（线上结题）

高等学校大学数学教学研究与发展中心于 2021 年 1 月 29 日组织线上评审会议。会议专家组对北京化工大学崔丽鸿老师主持的“在线教育环境下，大学数学课程教学模式、教学方法、学习过程评价方法的研究与实践”类项目“基于 MOOC 与智慧教学下，大学数学课程教学模式、教学方法、学习过程评价方法的研究与实践”（CMC20190302）进行结题验收。经过项目负责人汇报、专家提问、资料查询以及专家组讨论，形成如下结题意见：

本项目研究并实践了“问题驱动+多元混合”的“四用”教学模式，探索了因材施教、多元混合的教学方法，将启发式、互动式和探究式等教学方法融入教学过程，构建了线上、线下混合式教学的评价指标和评价方法。

该项目达到了预期研究目标，取得了优秀的研究成果，同意结题。

高等学校大学数学教学研究与发展中心

2021 年 1 月 29 日

高等学校大学数学教学研究与发展中心

2015 年立项教改项目结题鉴定意见

课题名称 (项目编号)	新媒介环境下线性代数课程教学中培养学生创新思维、创新能力的研究与实践（CMC20150306）
课题负责人	崔丽鸿（北京化工大学）
专家组意见	2017 年 8 月 27 日高等学校大学数学教学研究与发展中心组织专家对该项目进行结题验收，通过认真审阅项目结题报告，查看项目成果和结题材料，经答辩讨论，形成以下意见： 该项目采用理论研究、数字化资源研发和教学实践同步进行的方法，重点研究在新媒介环境下《线性代数》课程教学中培养学生创新思维、创新能力。提出构建《线性代数》“四化”理念；更新完成了线性代数教材体系；通过在中国大学 MOOC 平台开设一轮 SPOC 课程。该课题工作内容丰富，积累了积极有益的教改经验。 专家组认为，该项目完成了预定的研究目标，并为同类研究提供了操作性较强的做法和经验，一致同意通过对该项目的鉴定。
评审专家签字	郝志峰 [illegible] 王绵森 冯有前 [illegible]

高等学校大学数学教学研究与发展中心

2017 年 8 月 27 日

北京市教育委员会

京教函〔2020〕427号

北京市教育委员会关于
公布2020年北京高等教育
“本科教学改革创新项目”的通知

14	析数悟理、思政立德—在数理公共基础课群中融入课程思政的探索与实践	邵晓红	北京化工大学	重点项目

项目名称：线性代数数字课程资源开发

委 托 人：高等教育出版社有限公司

（甲方）______

研究开发人：北京化工大学

（乙方）______

签订地点：北京

签订日期：2015年12月2日

有效期限：2015年12月2日至2016年12月31日

教育部在线教育研究中心

教育部在线教育研究中心
关于2017年度“混合式教学试点项目”评选结果的通知

2017 年度教育部在线教育研究中心（以下简称中心）“混合式教学试点项目”已完成评选工作。经评审专家评议，决定授予北京第二外国语学院等 64 个院校成为“2017 年混合式教学试点单位”，名单如下表：

序号	试点单位	执行单位	负责人
1	北京第二外国语学院	教务处	裴怀涛
2	北京服装学院	教务处	席阳
3	北京工商大学	研究生院	朱海云
4	北京化工大学	理学院	崔丽鸿
5	北京师范大学	研究生院	胡定荣、王建平
6	北京邮电大学	信息与通信工程学院	邓钢
7	成都师范学院	教育信息化推进办公室	唐瓷
		史地与旅游学院	辜世贤
		音乐学院	唐维霜
8	电子科技大学	继续教育学院	张映敏
9	东北大学	理学院	吴海娜
10	防灾科技学院	灾害信息工程系	郭娜
11	福建农林大学	教务处	吴祖建
12	阜阳师范学院	马克思主义学院	王健
13	贵州理工学院	电气与信息工程学院	陈燕秀
14	贵州医科大学	基础医学院&电化教学中心	张晶
15	桂林理工大学	地球科学学院	孙媛
16	桂林医学院	护理学院	马香
17	哈尔滨工业大学	航天学院	田丽
		机电工程学院	陈月华
		计算机科学与技术学院	张丽杰
		经济与管理学院	艾文国
		外国语学院	周之南

教育部在线教育研究中心秘书处（清华大学在线教育办公室）地址：北京市 清华大学

3. 教材清单及佐证

（1）姜广峰、崔丽鸿主编：《线性代数》，高等教育出版设，2015 年

（2）崔丽鸿、姜广峰：《线性代数导学备考一书通》，化学工业出版社，2011 年

（3）姜广峰，崔丽鸿，线性代数难点剖析与和典型例题讲解，高等教育出版社 高等教育电子音像出版社，2018 年。

（4）彭建华主编，崔丽鸿等参编：《线性代数典型题解析及自测试题》，西北工业大学出版社，2000 年（1）高等教育出版社出版（主编之 1），线性代数，2015 年。

（5）杨永愉、李秋姝、崔丽鸿：《高等数学学习辅导》，化学工业出版社，2007 年。

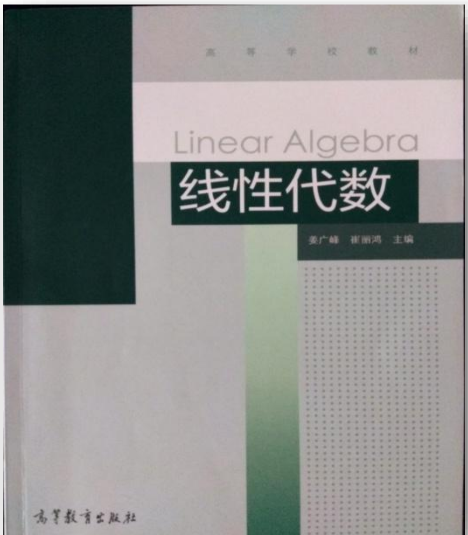
（6）刘渭川、龙洪波主编，崔丽鸿等副主编： 《高等数学概念释义与错解辨析》，武汉工业大学出版社，1995 年。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 姜广峰，崔丽鸿主编. -- 北京 : 高等教育出版社，2015.7
ISBN 978-7-04-043595-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①姜… ②崔… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.23

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第169376号



前　言

线性代数在我国高等学校各专业培养计划中是一门重要的公共基础课程，在自然科学、工程技术、社会科学、经济管理等众多领域具有十分广泛的应用，是非常重要的数学工具之一。

本书根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的线性代数课程教学基本要求，借鉴国内外线性代数优秀教材，以现代教学理念为依托，融入课程改革新思维和新模式，并结合作者长期教学实践的经验和体会，不断修改编写完成。

本书内容组织特色

为适应现代化教育理念和手段，并结合线性代数具有抽象性和大计算的双重数学特点，在继承传统教材的精华之上，本书力求彰显如下几个方面：

（1）重视概念的引入背景和实例的可接受性，兼顾严格理论推导和计算方法的严密和统一，凸显矩阵和行列式的工具作用，强调初等变换的功能，注重呈现线性方程组求解与矩阵初等变换和矩阵秩的密切联系，同时精选新颖丰富的典型例题，注重借题释理，以例示法。

（2）每章增加应用实例及 MATLAB 计算举例和相应练习题，强调融入数学建模思想，呈现数学软件与计算方法的密切结合，突出对学生综合能力和实际应用能力的培养。

（3）按节配备习题，按章配备总习题，题目的配置与全书各章节内容不仅具有“匹配性”“阶段性”“渐进性”，而且具有“新颖性”“多层次性”和“综合性”。

（4）本书配套的数字课程网站上有各章的扩展阅读、习题参考答案以及 MATLAB 基本命令及其在线性代数中的应用。扩展阅读简述相关趣味小故事或发展史，或给出某一概念的外延和内涵。注重开启拓展思维大门，开阔学生视野。

高等教育出版社

证　明

《线性代数》（ISBN：978-7-04-043595-5，主编：姜广峰、崔丽鸿）于2015年9月在我社出版。该书累计印刷7次共17585册，销往北京、吉林、浙江、上海、湖北、江苏、天津、山东、甘肃、重庆等10余个省、自治区、直辖市的多所高校。

教师普通反映该书主次分明、结构流畅、通俗易懂，深入浅出地展示了线性代数的核心概念，又恰当穿插了相应的应用，并配有相应的MATLAB求解，加强了读者对概念和思想方法的理解，体现了线性代数有用的思想，也为应用型本科大学生应用能力培养提供了帮助；还提供了丰富的数字资源，便于读者更全面地了解教材内容。该书不仅是一本适合线性代数课程选用的优秀教材，还是一本满足自学和考研需求的优秀参考书。

特此证明。

高等教育出版社有限公司

总编辑办公室

2020年11月22日

线性代数教材配套资源链接 http://abook.hep.com.cn/43595

线性代数难点剖析与典型习题

登 录

ISBN：978-7-89510-149-4

主编 姜广峰 崔丽鸿

编 者 单 位：北京化工大学
出 版 时 间：2018年11月
出 版 单 位：高等教育出版社 高等教育电子音像出版社

线性代数是高等学校的一门基础理论课程，主要讨论有限维线性空间的线性理论与方法，具有较强的逻辑性、抽象性与广泛的实用性。为使学生能够高效学习、快速捕捉线性代数课程的重点难点，北京化工大学线性代数教学团队结合多年的教学经验，精心打造了《线性代数难点剖析与典型习题数字课程》。

本数字课程通过对线性代数的考点进行归纳解读，分析命题趋势，剖析教学难点，把握概念和定理的本质特征，挖掘知识点间的内在联系，系统整合知识点，分10个专题、50道典型习题对线性代数中的难点习题和思考方法进行讲解。数字课程包括习题选讲、重难点、课件、自测题等教学资源，同时提供作业、测试、答疑等教学支撑活动，可以有效地辅助教师教学，帮助学生提高学习效率和学习能力。

本数字课程可供高等学校理工类、经管类专业相关课程定制使用，也可供教学参考。收起

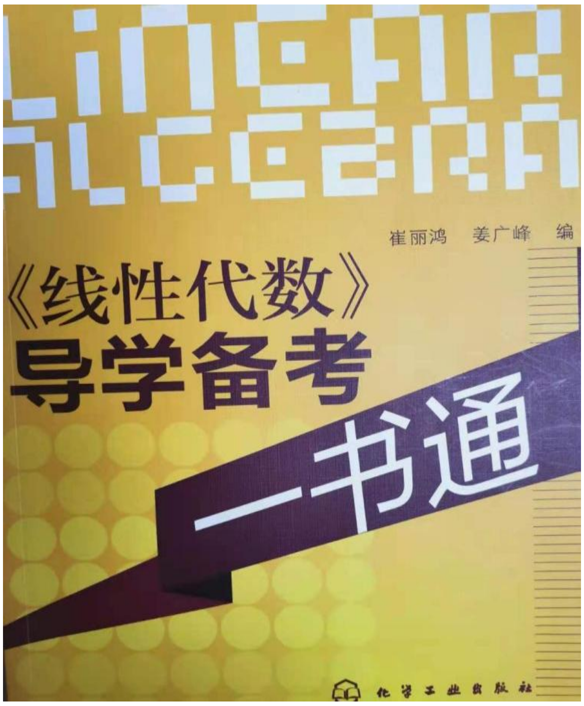
课程教师

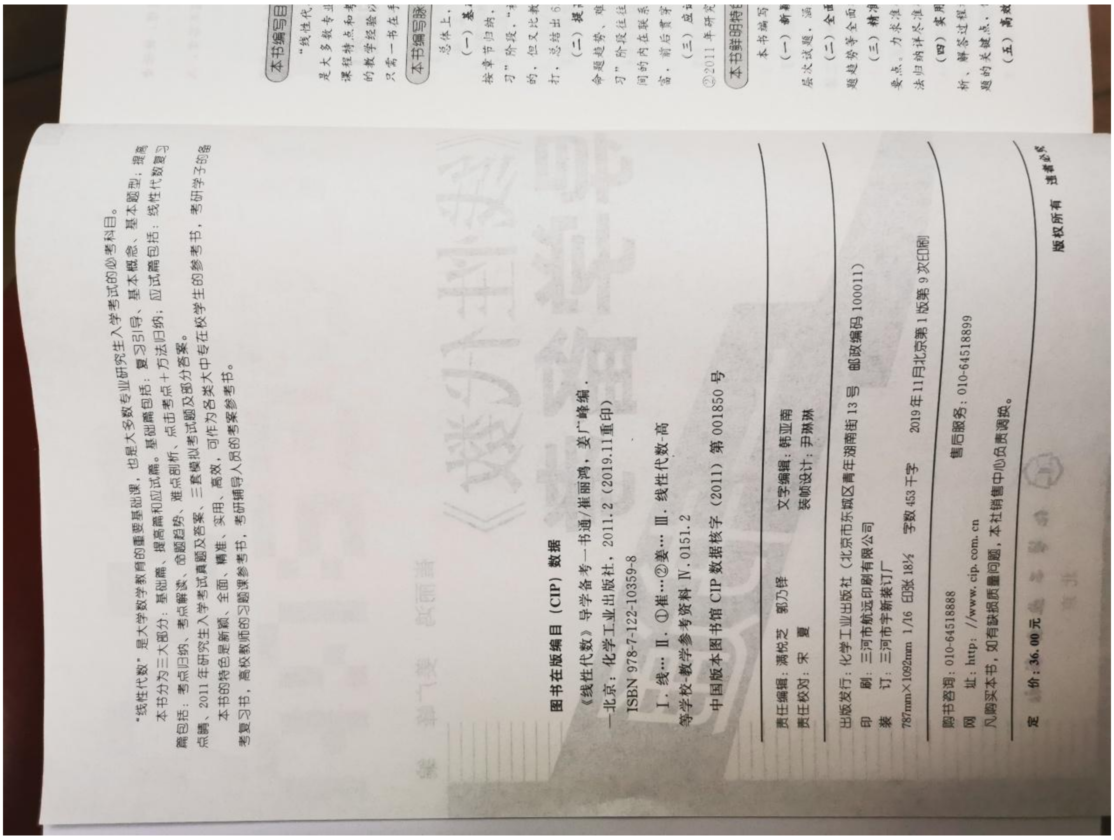
姜广峰

崔丽鸿

版权信息

作品名称　线性代数难点剖析与典型习题数字课程
作　　者　姜广峰　崔丽鸿　姜冬青　苏贵福　周冬梅
出版发行　高等教育出版社　高等教育电子音像出版社
出版时间　2018年11月
策划编辑　李艳馥





"线性代数"是大学数学教育的重要基础课，也是大多数专业研究生入学考试的必考科目。

本书分为三大部分：基础篇、提高篇和应试篇。基础篇包括：复习引导、基本概念、基本题型；提高篇包括：考点归纳、考点解读、命题趋势、难点剖析、点击考点＋方法归纳；应试篇包括：线性代数复习点睛、2011年研究生入学考试真题及答案、三套模拟考试题及部分答案。

本书的特色是新颖、全面、精准、实用、高效，可作为各类大中专在校学生的参考书，考研学子的备考复习书，高校教师的习题课参考书，考研辅导人员的考案参考书。

图书在版编目（CIP）数据

《线性代数》导学备考一书通/崔丽鸿，姜广峰编．—北京：化学工业出版社，2011.2（2019.11重印）

ISBN 978-7-122-10359-8

Ⅰ.线… Ⅱ.①崔…②姜… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 001850 号

责任编辑：满悦芝　郭乃铎　　文字编辑：韩亚南
责任校对：宋　夏　　装帧设计：尹琳琳

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　刷：三河市航远印刷有限公司
装　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张 18½　字数 453 千字　2019 年 11 月北京第 1 版第 9 次印刷

购书咨询：010-64518888　　售后服务：010-64518899
网　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　价：36.00 元

4. 在线课程清单及网址

（1）《线性代数典型习题讲解》MOOC 课程，在爱课程平台运行 7 期；

网址：https://www.icourse163.org/course/BUCT-1002607035

（2）《线性代数》优慕课课程，在北化在线运行 4 期；

网址：https://course-proxy2.buct.edu.cn/meol/index.do

（3）《矩阵论及其应用》MOOC 课程，在学堂在线运行 3 期；

网址：https://www.xuetangx.com/course/SDDXP0854003501/7770016

（4）线性代数 MOOC 课程等待上线中。

网址：https://www.icourse163.org/course/BUCT-1002602034?tid=1002790094

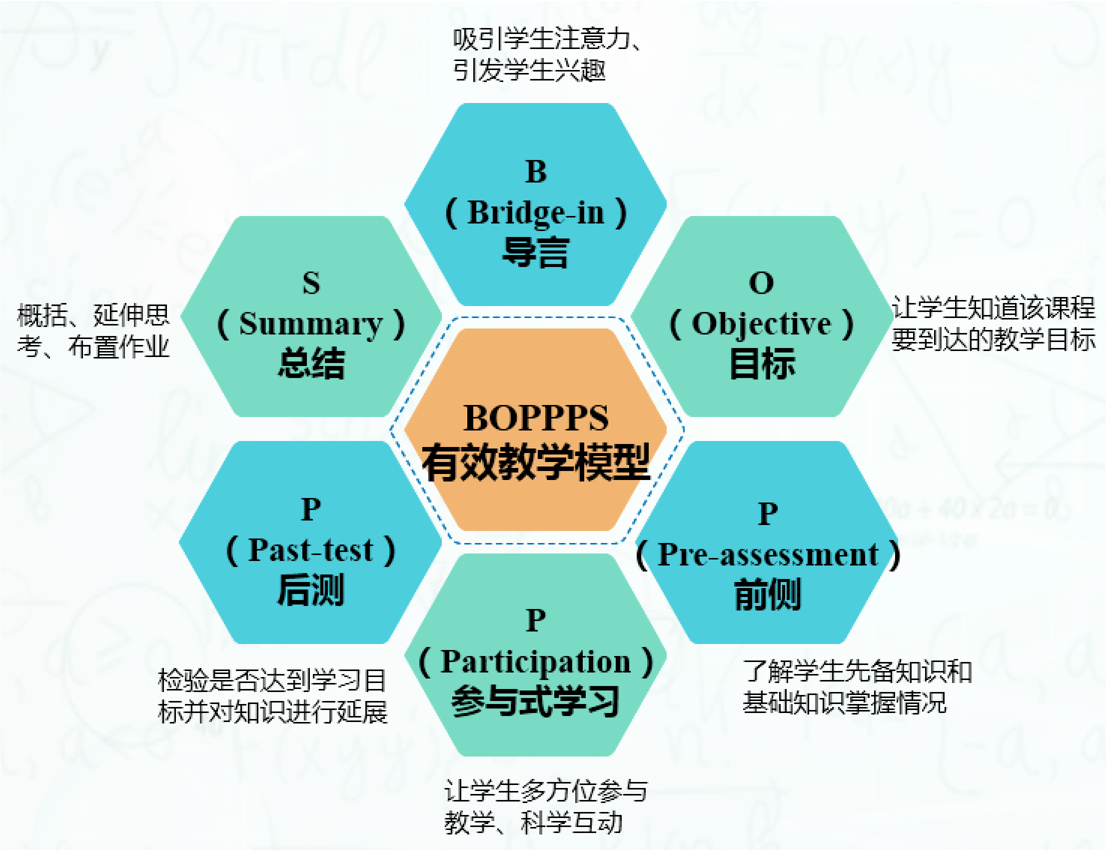
5. 线上线下混合式教学内容的模块化列表及教学设计流程图

模块内容	模块主题	模块特点	呈现形式	教学方式	学时
一般内容	矩阵的概念及乘法	基础性易于掌握	线上+线下	案例引入+现象反思	2
	逆矩阵和分块矩阵的计算		线上+线下	案例引入+教师讲授	3
	行列式的性质		线上+线下	问题驱动+思辨讨论	2
	线性方程组的求解与初等行变换		线上+线下	问题驱动+思辨讨论	2
	线性方程组的等价命题		线上+线下	现象反思+师生讨论	2
	n 维向量的基本概念		线上+自学	例题导入+教师讲授	1
	向量组的内积与正交向量组		线上+线下	例题导入+教师讲授	2
	化二次型为标准型		线上+线下	现象反思+师生讨论	2
	行列式与克莱姆法则	易于理解 内容相对独立方便计算	线上+自学	问题驱动+过程点评	1
	矩阵的线性运算		线上+自学	问题驱动+过程点评	1
	二次型与对称矩阵		线上+线下	问题驱动+过程点评	1
重点难点内容	初等矩阵	抽象逻辑性强 关联性强	线上+线下，精讲	例题导入+教师讲授	2
	n 阶行列式的定义		线上+线下，精讲	问题驱动+思辨讨论	2
	行列式按行(列)展开		线上+线下，精讲	问题驱动+思辨讨论	2
	行列式与方阵		线上+线下，精讲	例题导入+教师讲授	2
	矩阵的秩		线上+线下，精讲	现象反思+师生讨论	2
	向量组的线性关系		线上+线下，精讲	任务驱动+师生互动	2
	向量组的秩		线上+线下，精讲	任务驱动+教师讲授	2
	**n* 维向量空间		线上+线下，精讲	现象反思+师生讨论	2
	线性方程组解的结构		线上+线下，精讲	任务驱动+翻转课堂	2
	特征值和特征向量		线上+线下，精讲	现象反思+师生讨论	2
	矩阵相似与对角化		线上+线下，精讲	实战演练+师生讨论	2
	实对称矩阵的性质和对角化		线上+线下，精讲	任务驱动+师生互动	2
	二次型的不变量和唯一性		线上+线下，精讲	任务驱动+启发探索	2
	*二次型的正定性		线上+线下，精讲	任务驱动+启发探索	2
	*线性代数中的典型应用		线上+线下，精讲	任务驱动+启发探索	2

式子大内容	高阶行列式的计算	基本性贯穿性计算量大	线上+线下	教师讲授+启发式	1
	矩阵的初等变换		线上+线下	任务驱动+过程点评	1
	方程组的判定和求解		线上+线下	教师讲授+启发式	2
软件操作内容	矩阵的运算	操作性强 应用性强 交叉性强	线上+线下	案例教学+任务驱动	0.5
	*行列式的计算		线上+线下	案例教学+任务驱动	0.5
	线性方程组求解		线上+线下	案例教学+任务驱动	0.5
	*向量空间的基		线上+线下	案例教学+任务驱动	0.5
	*特征值与特征向量的计算		线上+线下	案例教学+任务驱动	0.5
	*二次型的图形实现		线上+线下	案例教学+任务驱动	0.5
减去*号内容为 48 学时				总课时	56

6. 基于 BOPPPS 模型的混合式教学设计表单样例

<table>
<tr><td>课程名称</td><td colspan="5">线性代数</td></tr>
<tr><td>教学内容</td><td colspan="5">正交矩阵的定义和判断，应用其几何意义画出五角星及国旗。</td></tr>
<tr><td>教学手段</td><td colspan="5">线上、线下混合式教学，课堂讲授和提问讨论，辅以多媒体幻灯图片，雨课堂平台和慕课平台。</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">同学们理解正交矩阵的定义，应用新学的知识，结合几何特性，用向量的方法画出五角星及国旗。</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="5">正交矩阵的几何意义。</td></tr>
<tr><td>教学难点</td><td colspan="5">正交矩阵的计算和应用。</td></tr>
<tr><td rowspan="7">授课过程设计</td><td>BOPPPS
有效教学结构</td><td>时间</td><td>教学者活动</td><td>学习者活动</td><td>PPT/
板书设计</td></tr>
<tr><td>导言 Bridge-in</td><td>3m</td><td>问答方式引入红旗标准和思政元素</td><td>抢答和讨论</td><td>PPT</td></tr>
<tr><td>学习目标 Objective</td><td>3m</td><td>掌握向量旋转的矩阵背景，了解正交矩阵的定义及等价判定方式，培养了逻辑推理的能力，训练了多角度思考问题的素质</td><td>听讲</td><td>PPT</td></tr>
<tr><td>前测 Pre-assessment</td><td>5m</td><td>通过“北化在线”发布试题：施密特正交化的过程</td><td>参与解答</td><td>PPT</td></tr>
<tr><td>参与式学习 Participatory-learning</td><td>14m</td><td>引入向量旋转的矩阵背景，给出正交矩阵的定义，完成五星红旗中五角星的位置</td><td>可邻桌协作“雨课堂”做答</td><td>PPT+板书</td></tr>
<tr><td>后测 Post-assessment</td><td>14m</td><td>讲解正交矩阵的基本性质和等价判断，“雨课堂”发布试题检测</td><td>“雨课堂”做答</td><td>PPT</td></tr>
<tr><td>总结 Summary</td><td>6m</td><td>总结正交矩阵的定义、性质和具体应用，布置课后作业</td><td>听讲</td><td>PPT</td></tr>
</table>


吸引学生注意力、
引发学生兴趣
B
（Bridge-in）
导言
S
（Summary）
总结
概括、延伸思
考、布置作业
O
（Objective）
目标
让学生知道该课程
要到达的教学目标
BOPPPS
有效教学模型
P
（Past-test）
后测
P
（Pre-assessment）
前侧
P
（Participation）
参与式学习
检验是否达到学习目
标并对知识进行延展
了解学生先备知识和
基础知识掌握情况
让学生多方位参与
教学、科学互动

6. 课程思政案例目录清单及其教学案例设计 15 个

序号	案例主题	章节	思政要点
1	线性代数中的美学	全书	引导帮助学生从美学（抽象美，简洁美，统一美，奇异美，对称美）的角度去学习和理解所学知识，激发学习兴趣
	矩阵源于中国	1.1	《九章算术》包含矩阵雏形，体现我国数学文化历史悠久，增强学生的民族自豪感、文化自信
3	防疫二维码中的矩阵	1.1	防疫二维码与矩阵的关系，体现家国情怀
4	矩阵乘法与出行	1.2	矩阵乘法—高铁出行方案—国家建设、民族自豪
5	逆矩阵与解密	1.3	求逆矩阵—信息加密—国家安全—保家卫国
6	矩阵中的“0”和“1”	1.3	零矩阵和单位矩阵蕴含的集体主义观和积极的人生观
7	范德蒙行列式保障通信安全	2.3	范德蒙行列式—信道安全—搭线
8	疫情下的“秩”序与人脸识别	3.3	维护校园防疫“秩”序刷脸到人脸识别，引出秩与机器学习算法关联，激发学生学习兴趣
9	方程组的有趣应用	3.4	方程组--交通建设—建设祖国、爱国护国情怀
10	大国家队模式的向量组	4.3	“大国家队模式”--“组队上场比赛的小组队”--“向量组的极大无关组”--凝聚力--团结协作力
11	正交矩阵与五星红旗	4.5	向量旋转--五星红旗的制作—爱国情怀
12	北斗导航中的定位问题	5.3	用线性代数来解决“北斗导航”系统的四星定位问题，激励学生家国情怀和求知欲望
13	特征向量与优美的小波	6.1	科教融合案例，培养学生高级思维和应用能力
14	实对称矩阵与生活美	6.3	葡萄酒分类—实对称矩阵的对角化—开阔视野—学习兴趣、家国情怀
15	国家建设中的二次曲面	7.2	二次型—曲面—鸟巢—国家建设、民族自豪感

行列式的美学

一、 课程教学目标

行列式是按照一定的法则，计算存储在一个方阵中的数据所对应的数值。行列式也体现了我们构建的线性代数“4 模块”课程思政资源中的符号美、简约美、对称美、奇异美等美学。通过本案例的教学，使学生达到如下目标：

知识目标：理解向行列式等概念，知道二阶、三阶行列式中展开式的特点，理解一般行列式的定义。

能力目标：训练已知条件的充分挖掘，内在关系的发现和利用，逻辑推理的能力。

素质目标：通过发现规律进行抽象归纳，将问题化繁为简，从“形变质不变”看待事物变化，提高辩证思维能力和应用能力。

二、课程育人目标

围绕“行列式的定义”改革展开教学，将“行列式的定义及计算”对应于“线代中的美学”，让学生讨论并发现符号美、简约美、对称美、奇异美。通过“二阶、三阶行列式”案例，激发学生学习兴趣，增加自身核心竞争力，成为更好的自己。

三、育人案例设计

教学内容 （简述，不超过 50 字）	思政要素切入点 （100 字左右）	育人目标 （100 字左右）
第 2 章 第 1 节 行列式的定义	围绕“行列式的定义”改革展开教学，将“行列式的定义及计算”对应于“线代中的美学”，让学生讨论并发现符号美、简约美、对称美、奇异美。	知识目标：理解向行列式等概念，知道二阶、三阶行列式中展开式的特点，理解一般行列式的定义。 能力目标：训练已知条件的充分挖掘，内在关系的发

		现和利用，逻辑推理的能力。 素质目标：通过发现规律进行抽象归纳，将问题化繁为简，从“形变质不变”看待事物变化，提高辩证思维能力和应用能力。

四、实施过程

1. 开场白。

本次课程讲授的章节标题(第 2 章第 1 节行列式的定义),主要内容(包括二阶、三阶行列式与一般行列式的定义),并强调所需的主要相关知识(向量组的线性相关性)，以 PPT 形式呈现。

2. 案例引入—-二元线性方程组

二元方程组的解的公式

设二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

用消元法,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,解得 $x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$。

请同学们思考、讨论：

解有什么规律？如何记忆以上二元线性方程组？

3. 引入二阶行列式的定义

令 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,称为二阶行列式 ,则

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ \ x_2 = \frac{b_2a_{11} - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

如果将D中第一列的元素a_{11}, a_{21} 换成常数项b_1, b_2 ,则可得到另一个行列式,用字母D_1表示,于是有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

按二阶行列式的定义,它等于两项的代数和：$b_1a_{22}-b_2a_{21}$,这就是x_1的表达式的分子。同理将D中第二列的元素 a 12,a 22 换成常数项b1,b2 ,可得到另一个行列式,用字母D_2表示,于是有

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

按二阶行列式的定义,它等于两项的代数和：$a_{11}b_2-a_{21}b_1$,这就是x_2的表达式的分子。

于是二元方程组的解的公式又可写为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \end{cases} \quad \text{其中} D\neq 0$$

引发学生思考：二阶行列式的美。

组织讨论，给出答案—**符号美、对称美、奇异美**。

4.引入三阶行列式的定义

设三元线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$

用消元法解得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$
$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$
$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

定义： 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

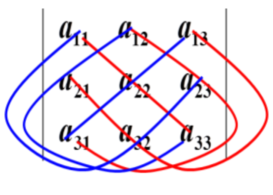
记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$，称为三阶行列式，则

当 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，方程组有解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中 $D_j\ (j=1,2,3)$ 是由常数项 b_1,b_2,b_3 替换 D 中的第 j 列得到的的三阶行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$



引发学生思考：三阶行列式与二阶行列式的共同之处。

答案：项数、每项所含元素个数、符号，体现二阶、三阶行列式的统一美。

5.给出实例展现三阶行列式与几何的联系，体现美

三阶行列式可以采用对角线法计算其值，为了更直观的了解这个过程，我们把行列式的元素依次排在圆柱体的外圆上，它们的排列方式及乘积顺序如下图，再将圆柱体变形为圆锥体，它的俯视图就非常具有规律和美感。

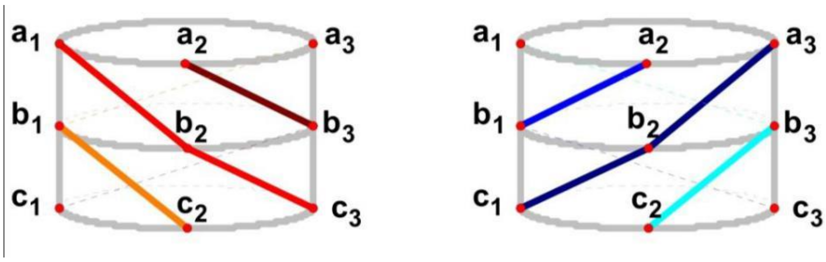


图 1、乘积顺序得正号（图左）　　　乘积顺序得负号（图右）

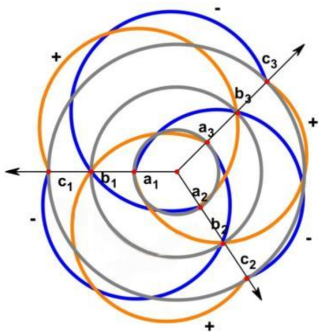


图 2、圆锥体俯视图

线性代数与几何也有着非常密切的联系，许多性质定义都可以用几何图像来表示。下面我们就来了解一下二阶或三阶行列式一些性质的几何意义。二阶行列式是两个向量所张成的平面四边形，而三阶行列式

$$\det(a,b,c)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

则是平行六面体的有向体积，如图 3。

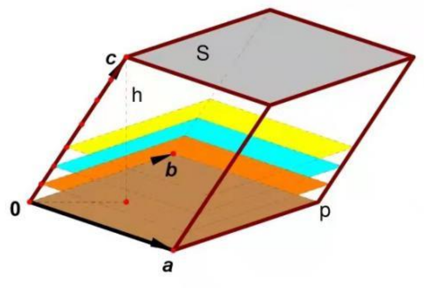


图 3-3、平行六面体

行列式两行（列）元素相同，行列式等于零，平行六面体向下压缩变为平面四边形，如图 4。

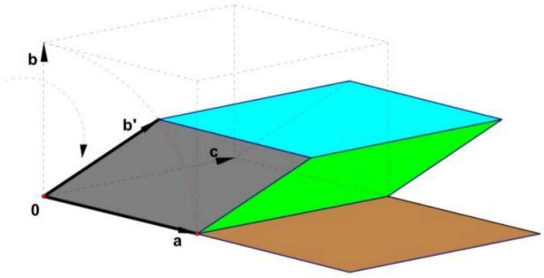


图 4、平行六面体压缩为平面四边形

行列式中交换两行（列），行列式值符号变化，用几何图像表示为图 5。

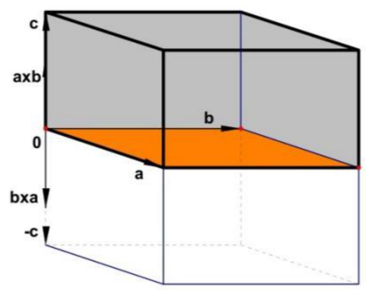


图 5、行列式交换两行几何表示

$k\det(a,b,c)=\det(ka,b,c)=\det(a,kb,c)=\det(a,b,kc)$，用几何图像表示为图 6。

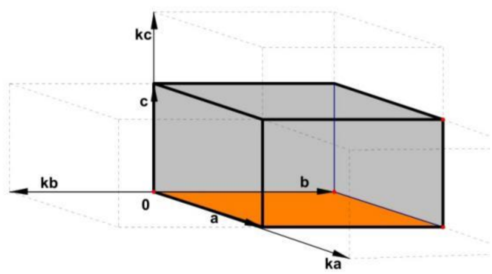


图 6、平行六面体一条棱扩大 k 倍

（1）$\det(a,b,c)=\det(a,b,ka+c)$，几何意义为平行六面体在 a 方向上进行变换，表示为图 7。

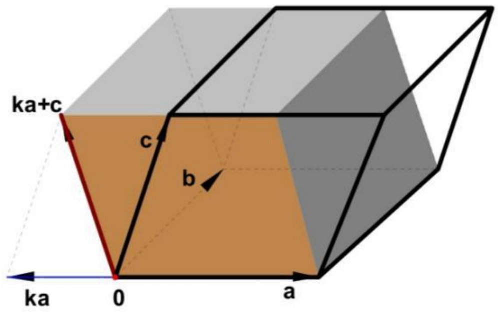


图 7、平行六面体在 a 方向变换

6.引入 N 阶行列式的定义与实例

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{l_1 l_2 \cdots l_n} (-1)^{\tau(l_1 l_2 \cdots l_n)} a_{l_1 1} a_{l_2 2} \cdots a_{l_n n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和，$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$ 称为行列式的一般项.特别地，当 $n=1$ 时，$|a_{11}| = a_{11}$；当 $n=2,3$ 时，即为前述的二阶，三阶行列式

【例 2.2】计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，其中 $a_{ii} \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$.

【解】 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

上三角行列式的值等于其主对角线元素乘积，这一结论对于下三角行列式也成立，即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

上述主对角线以外的元素全为零的行列式称为对角行列式.

7. 从例子中总结“行列式的奇异美”

在培根曾说过:“美在于奇特而令人惊异。”而奇异美就指那些能够打破人们原有的认知和习惯，表现出超乎想象、引人思考、已于寻常、奇妙特别的美。从数学的角度来说，许多数学分支的发展靠的就是数学奇异的特性，它吸引着无数数学家前仆后继向着更深的层次学习研究。人们在最初定义数时，只知道 1、2・・・这样的实数，然而随着时间的发展却惊异的发现，在 1 和 2 之间也存在无数的数，人们将它们定义为无理数，认为它们是不可名状的数，在它的定义过程中少不了人们对其的惊奇和探索。

在计算行列式的时候，常常有一些结构特殊的行列式，这些行列式与其它普通的行列式相比更具有结构上的美感，掌握了其中的规律，求解的过程就会变得更简单。

作业题：

2.1：2（1）、4、6

矩阵源于中国

一、课程教学目标

矩阵是现代数学中常用的工具，作为解决线性方程的工具，《九章算术》中已经出现了线性方程组的增广矩阵。通过本案例的教学，主要想达到如下三个目标：

知识目标：让学生学会矩阵概念，了解矩阵的重要性，矩阵的概念来自实际，是数学理论研究中的一个重要内容；矩阵是数据存储、处理的重要载体；矩阵解决许多实际问题的重要工具。

能力目标：从实际生活中提炼更多矩阵的例子，掌握常用数学软件的矩阵表达方式和基本的运算方法。

素质目标：结合中国古代的数学成就，增强民族自豪感和自信心，鼓励新一代的大学生勇于攀登科学高峰。

二、课程育人目标

从日常使用的十进制开始，介绍中国古代已经有了十进制计数法，普及传统文化。利用《九章算术》中方程术，了解古代中国劳动人民的文明程度和聪明的数学才智，使学生对中国传统文化更加了解，增强文化自信。

三、育人案例设计

教学内容 （简述，不超过50字）	思政要素切入点 （100字左右）	育人目标 （100字左右）
第1章 1.1 矩阵的概念	（1）本小节介绍《孙子算经》中的十进制计数法，介绍中国在2000年前就有十进制，更有12进制（干支纪年法），只是记号不同。	介绍日常使用的十进制以及矩阵的雏形，普及传统文化。利用《九章算术》中方程术，了解古代中国劳动人民的文明

	（2）通过《九章算术》之方程章的具体实例，看出中国古代已经有方程组、矩阵，比西方的相关概念与运算早 1800 年。	程度和聪明的数学才智，使学生对中国传统文化更加了解，增强文化自信。

四、实施过程

1. 开场

询问学生所知道的中国古代的数学成就有哪些，从小学知道的圆周率开始，到初中学过的勾股定理，再到高中用到的祖暅原理，说明古代中国人民具有数学才智。

2. 引例和定义

首先用来自于实际生活的例子引出矩阵，某宿舍甲、乙、丙、丁四位同学每天把早、中、晚三餐的餐费花销记录在一张表中，如下表所示是四位同学在 2013 年 6 月份的第一周的周一统计

	早餐	中餐	晚餐
甲	2	6	8
乙	2	7	7
丙	2	8	6
丁	3	8	9

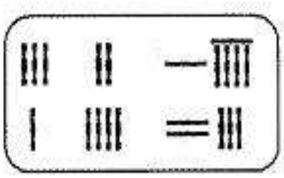
如此用表格 $A_1=\begin{pmatrix}2&6&8\\2&7&7\\2&8&6\\3&8&9\end{pmatrix}$ 的方式记录，引入矩阵，培养学生要生活节俭，花销要有度。

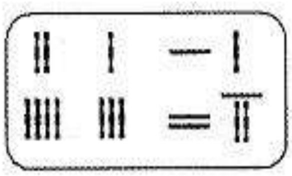
3. 引入定义和例子

定义：由 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列数表 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为一个 m 行 n 列矩阵，常记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，其中 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列所在的元素。

《九章算术》中已经有了矩阵的雏形，例如《孙子算经》记载十进制：“凡算之法，先识其位，一纵十横，百立千僵，千十相望，万百相当。……六不积五不只。”

另外，还有矩阵表示方程组的例子，如下


图（1）


图（2）

就是矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 19 \\ 1 & 4 & 23 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 \\ 4 & 3 & 27 \end{pmatrix}$，分别是现代的线性方程组

$\begin{cases} 3x+2y=19 \\ x+4y=23 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x+y=11 \\ 4x+3y=27 \end{cases}$。

在《九章算术•方程》中，有完整使用方程解决实际问题的例子，

例题：今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，

下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗；问上、中、下禾实一秉各几何？”

现代的观点来看，设上禾实一秉 x 斗，中禾实一秉 y 斗，下禾实一秉 z 斗，则有三元一次方程组$\begin{cases}3x+y+2z=39\\2x+y+3z=34\\x+3y+2z=26\end{cases}$，对应的矩阵为$\begin{pmatrix}3&1&2&39\\2&1&3&34\\1&3&2&26\end{pmatrix}$。

对一般线性方程组$\begin{cases}\boldsymbol{a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1}\\\boldsymbol{a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\\boldsymbol{a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m}\end{cases}$，本质是其线性方程组对应的增广矩阵$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}$，两者间是一一对应关系。

4. 思政要点

通过介绍十进制和矩阵的例子，说明中国古代应用数学方面的领先地位，对于现代大学生增强四个自信有重要的支撑作用。

5. 介绍常见矩阵

还有一些常见的矩阵，（1）若行数=列数=n，称为 n 阶方阵，

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

表示主对角线，表示副对角线。

（2）形如$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$称为对角矩阵，记为$diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

(3) 记$E=E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，称为单位矩阵。

（4）若 n 阶方阵$A=(a_{ij})$中，主对角线下方的元素全是零，即$a_{ij}=0, i>j$，称

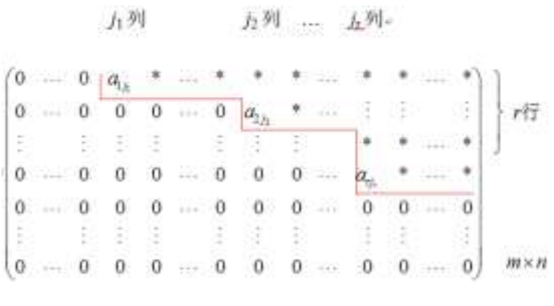
$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$为上三角矩阵，比如

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$是 4 阶上三角矩阵,同样可以定义下三角矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$。

（5）元素都是零的行称为零行，非零行的首非零元即坐起第一个不为零的元素。称具有下列特征的矩阵为**行阶梯型矩阵**：

(a) 零行位于非零行的下方（如果有的话）;

(b) 各行非零行的首非零元所在的列随着行数增加而增加。



下列都是行阶梯型的例子

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

（6）具有下列特征的矩阵称为简化行阶梯型矩阵

(a) 行阶梯型的矩阵；

(b) 非零行的首非零元都是 1；

(c) 每个首非零元 1 所在的列的其他元素全是 0.

下列都是简化行阶梯型的例子

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

6. 总结和反思

通过矩阵概念引入，让学生知道：矩阵的概念及其很多运算都起源于 2000 多年前的中国，传播优秀中华文明，增强学生的文化自信。

矩阵话防疫

矩阵，作为线性代数的重要工具，有必要在课堂上向同学讲解矩阵的直观定义和深层次含义。二维码实现信息检索实现校园防疫案例体现了我们构建的线性代数“4模块”课程思政资源中围绕大计算和应用案例展开的线代之妙：通过本案例的教学，使学生达到如下目标：

一、 课程教学目标

1.知识目标：通过案例导引，让学生掌握矩阵的概念，理解矩阵源于应用，可用于存储应用科学问题中的信息，是数表，也是一种数据结构，可用于数学软件解决实际问题；并能根据实际问题，自己凝练问题中包含的信息，给出矩阵表示；

2.能力目标：通过学习，能够把实际问题量化，矩阵化，并通过数学软件解决实际问题，获取信息；

3.素质目标：通过学习矩阵的定义，培养学生逻辑思维能力、抽象思维及对事物的认知能力，培养学生分析和解决问题的能力，提高学生将基础知识用于实践的能力。

二、 课程育人目标

通过问题驱动案例、课堂互动、例题三个环节，令学生深刻领悟中华民族是伟大的民族，有智慧和凝聚力，“舍小家为大家、先国家后个人”，是中华文化的核心基因和中华民族的精神标识，是把中华儿女团结在一起的强大精神力量。培养学生的家国情怀和民族自信。

三、 育人案例设计

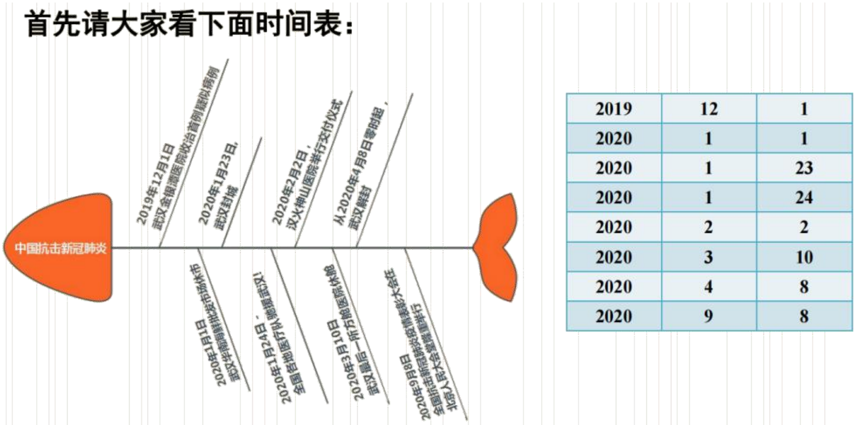
教学内容（简述，不超过50字）	思政要素切入点（100字左右）	育人目标（100字左右）
第1章 矩阵	防疫二维码身份识别图案系统，将热点时事思政元素与图像识别相结合，并引出本节内容矩阵的定义，培养学生的家国情怀，民族自信；互动环节设计中国共产党建党100周年时间矩阵纪念章，例题讲解矩阵源于中国的《九章	通过问题驱动案例、课堂互动、例题三个环节，令学生深刻领悟中华民族是伟大的民族，有智慧和凝聚力，“舍小家为大家、先国家后个人”，

	算术》，树立民族自豪感，自信心！	是中华文化的核心基因和中华民族的精神标识，是把中华儿女团结在一起的强大精神力量。培养学生的家国情怀和民族自信。

四、 实施过程

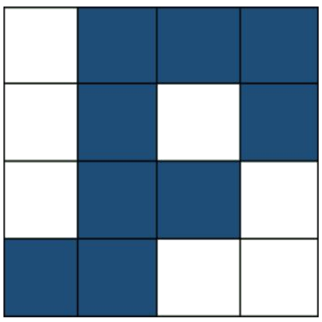
【学情分析】《线性代数》的授课对象是大一学生，这个阶段的学生还是延续了高中阶段的形象思维，对于线性代数过于抽象的知识体系并不能很好地接受。同时，他们思维活跃，但深度欠缺，具有对新知识的渴望与热情，也具有一定的提出问题，分析问题能力，但遇到复杂问题往往缺乏自信心，应用案例不易复杂，实际问题必须简化处理。

【1. 开场】借助思维导图及新闻图片，回顾2020中国人民众志成城，坚韧奉献，抗击新冠疫情取得重大战略成果的大事件，将时间节点用表格记录，直观地引出数表的概念，并成功的进行了家国情怀、民族自信的渲染。



2019	12	1
2020	1	1
2020	1	23
2020	1	24
2020	2	2
2020	3	10
2020	4	8
2020	9	8

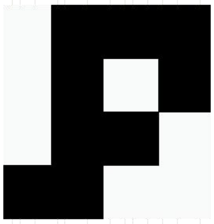
【2. 问题导入】用大家都熟悉的二维码让学生既有熟悉感又激发其好奇心和兴趣，自主探索如何通过扫描二维码中的身份识别图案获取身份信息。



【3. 案例启发式，化深为浅，激发研究性、自主性学习】对案例的主要实

施技术和过程简化，用学生听得懂，看得明白的形式展现，让数学回归应用的本源，让线性代数应用化，具体化，克服学生学习的畏难情绪，引导学生自主学习，给出矩阵中各行二进制信息中所包含的身份信息，并给自己设计一个专属的身份铭牌。激发学习兴趣，加深学生的探索欲，求知欲，以及用线性代数解决实际问题的动力 。

第三步：建立一个二维list，遍历图像中每一个像素，如果该像素为黑色则记为0，白色则记为1



1	0	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	0	1	1

表中第 i 行第 j 列对应的值记为 a_{ij}（i,j=1,2,3,4），称为表中的元素。

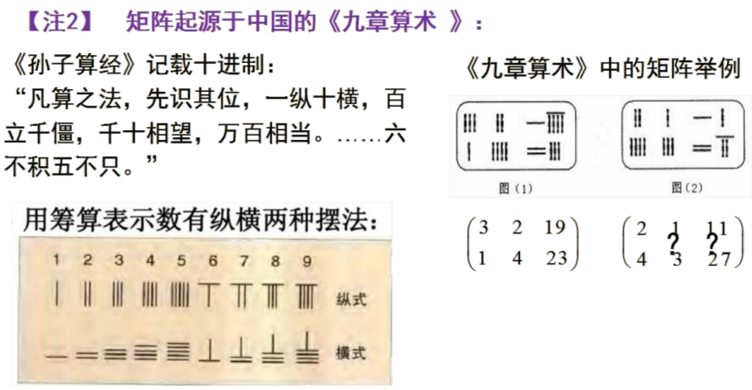
【4. 定义凝练】将上述两个例子里面的数表写成矩阵形式，并给出矩阵严格的数学定义，学生已结易于接受甚至可以自行给出定义。线性代数不再抽象而拒人于千里之外。利用数学软件，学生可以亲身体验矩阵。

【5. 学情检测】让学生自行设计建党 100 周年时间矩阵纪念章，课堂互动不再是刻板的数学题，学生参与的同时树立民族自信。

请同学们通过思政课上学习的中共党史大事记年表，
设计一枚中国共产党建党100周年时间矩阵纪念章，
提交图片。
时间5分钟。

进入雨课堂作答

【6. 深化定义，加深理解】通过几种特殊矩阵的定义及应用举例，加深学生对矩阵的理解，并未后面线性变换做知识储备。矩阵起源于九章算术，激发学生的民族自豪感和自信心。



【7. 案例实现，加深矩阵概念的深度和广度】通过数学软件，获取身份图像上的身份信息，学以致用，增强自信，激发学生的学习热情和兴趣，增强学生学好线性代数的信心 。

请为你自己设计一张抗疫铭牌吧！

写出对应的数表，并用MATLAB软件编写程序，读取其中的信息

对引例利用Matlab读取身份信息程序如下：

```
A=[1 0 0 0;1 0 1 0;1 0 0 1;-0 0 1 1];         % 定义身份信息矩阵
B=ones（1，4）*nan; %B为空矩阵，长度为4的行矩阵，用来放信息数据
for i=1:4
    B(i)=A(i,1)*2^3+A(i,2)*2^2+A(i,3)*2^1+A(i,4)*2^0;
end
B     % 读取身份信息
```

$$A_i = a_{i1}\times 2^3 + a_{i2}\times 2^2 + a_{i3}\times 2^1 + a_{i4}\times 2^0 \quad (i=1,2,3,4)$$

【8. 小结和思考、本次课需要达到的教学目标:】

对本次课内容进行总结，并针对定义理解和应用提出深层的疑问，请同学们在课下思考并进入到我们的线性代数在线课堂进行互动讨论，相应的答案、作业和本次课需要达到的教学目标，也在网络课堂中查看。

矩阵中的“0”和“1”

特殊矩阵，有着“特殊”的“外形”、“特殊”的性质、“特殊”运算性质。尤其是单位阵和零矩阵。矩阵中的“0”和“1”也体现了我们构建的线性代数“4 模块”课程思政资源中围绕学科数学文化和数学家故事展开的线代之情。通过本案例的教学，使学生达到如下目标：

一、 课程教学目标

知识目标：熟练掌握特殊矩阵的定义，特点，性质及特殊矩阵的运算规则。重点学习零矩阵与单位阵，掌握其定义、运算律、性质及用途。

能力目标：教学过程中充分调动学生的积极性、创造性和主动性,培养逻辑推理能力、抽象思维能力，全面提升学生综合能力.

素质目标：通过讨论“0”和“1”的历史，体会这两个数字的意义，获得人生感悟和体验。通过对零矩阵和单位矩阵的学习，让学生理解这两个矩阵在线性代数和实际应用中的重要性及特殊性，领悟人生哲理，树立不畏困难，从头再来，用于挑战的精神，以及不断努力拼搏，让自己的青春因奋斗而最美丽，时刻迎接挑战和机遇，像单位阵一样，优秀而无法替代。潜移默化培养学生学以致用，报效祖国的热情。

二、课程育人目标

围绕矩阵中的“0”和“1”展开教学，将特殊矩阵零矩阵和单位阵对应于“线代之情”，让学生讨论并发现特殊矩阵的意义和应用，激发学生学习兴趣，树立不畏困难，勇于拼搏的精神，增加自身核心竞争力，时刻迎接挑战和机遇。

三、育人案例设计

教学内容 （简述，不超过 50 字）	思政要素切入点 （100 字左右）	育人目标 （100 字左右）
第一章第二节 特殊矩阵的定义以及运算。	围绕矩阵中的“0”和“1”展开教学，将特殊矩阵零矩阵和单位阵对应于“线代之情”，让学生讨论并发现特殊矩阵的意义和应用，获得人生体验和感悟。	通过对零矩阵和单位矩阵的学习，让学生树立不畏困难，从头再来，用于挑战的精神，以及不断努力拼搏，让自己的青春因奋斗而最美丽，时

		刻迎接挑战和机遇，潜移默化培养学生学以致用，报效祖国的热情。

四、实施过程

1. 开场白。

我们从幼儿园开始学习数数，从几开始数呢？

你知道关于0的历史吗？

同学们知道，我国是什么时候将零纳入到自然数中的吗？

上幼儿园你的，更喜欢大些的数还是0和1这样的数？为什么？

上了中学之后，计算变复杂了，你喜欢0和1的程度有多深呢？

学习了十进制，二进制，最让我们震撼的数字是谁呢？体会一下零在占位中的作用。

矩阵是数表，是数据结构，是运算的单位，所以矩阵中也有对应的“0”和“1”，本节课，我们来学习特殊矩阵，重点学习零矩阵和单位阵。

2. 案例引入——零矩阵和单位阵

1. 引入零矩阵

新冠防疫中的最美的数字：清零！还记得吗？

2020年3月湖北武汉疫情逐步清零，著名主持人白岩松央视新闻中讲到：

2020年你最喜欢的数字是什么？相信很多中国人最喜欢的数字就是 0

它代表着健康、平安今日春分，桃花灼灼，杨柳青青，湖北连续两日病

例0新增0！好消息和春天，都让大家久等了（以上转自央视新闻）。

0，这个春天最美数字！众志成城，抗击疫情，请同学们结合疫情及线

上教学，谈谈对矩阵“0”的认识吧！

联想矩阵的定义，请同学们思考，矩阵中的零应该是什么样子的呢？

PPT展示零矩阵的定义：

【例 1】让我们先写出几个矩阵，例如下面的

$$O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad O_{2\times3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad O_{2\times1}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad O_{1\times3}=\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}$$

都是矩阵中的 0，称为零矩阵，也就是说，元素全为零的矩阵称为零矩阵.

我们常常把它记为 $\boldsymbol{O}$.

【注】（1）零矩阵都是零吗？

当然不是，比如上边的四个零矩阵，尽管它们的元素都为零，但因为它们是不同型的矩阵，所以谈不上相等. 因此，零矩阵未必等于零矩阵，而数中，0 恒等于 0. 下面我们通过一个例题，进一步认识不一样的零矩阵.

对比：

a，b，c 是数	设 A，B，C 是矩阵（假设都可乘）
若 $ab=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$.	? 若 $AB=O$，则 $A=O$ 或 $B=O$.
若 $a^2=0$，则 $a=0$.	? 若 $A^2=O$，则 $A=O$.
若 $\begin{cases}ab=ac,\\a\neq0.\end{cases}$ 则 $b=c$.	? 若 $\begin{cases}AB=AC,\\A\neq O.\end{cases}$ 则 $B=C$.

PPT 演示例题,让学生体会 $\boldsymbol{O}$ 矩阵在矩阵运算中的特殊性。思政点：看实物不要只看表象，要透过现象看本质。

【例2】设 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&-1\\-6&2\end{pmatrix}$，求 AB, A^2.

【解】按照矩阵的乘法，计算可得

$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$　　　结论1：$AB=O \not\Longrightarrow A=O$ 或 $B=O.$

$A^2=AA=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$　　　结论2：$A^2=O \not\Longrightarrow A=O.$

$AB=A^2, A\neq O,$ 但 $B\neq A$　　　结论3：$AB=AC \not\Longrightarrow B=C.$

PPT 展示下面几个算律，与数中的运算是相似的，培养学生逻辑思维能力：

（1）对于同型的矩阵，任何矩阵与零矩阵相加还是原来的矩阵，即 $A+O=A.$

（2）当矩阵 A 与零矩阵可乘时，任何矩阵与 O 矩阵相乘还是零矩阵，即 $AO=O,\quad OA=O.$

（3）对于任何一个矩阵 A，有 $A+(-A)=O.$

2. 引入单位阵

PPT 演示对角阵、单位阵定义：

（2）形如 $\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$ 的方阵，称为对角矩阵（或对角阵）.

记作　$A=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$

（3）方阵 $E_n=E=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$ 称为单位矩阵（或单位阵）.

记为

全为1

事实上，矩阵中的 1 叫做单位矩阵，例如下面的矩阵：主对角元素全部取 1，其它元素全部取零，我们把这样的矩阵称为单位矩阵.

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

根据矩阵的乘法，容易得到如下结论：

【结论 1】在可乘的条件下，任何一个矩阵与单位矩阵相乘，还是这个矩阵本身，例如：

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}$$

引发学生思考：数字零与零矩阵异同、数字 1 与单位阵异同

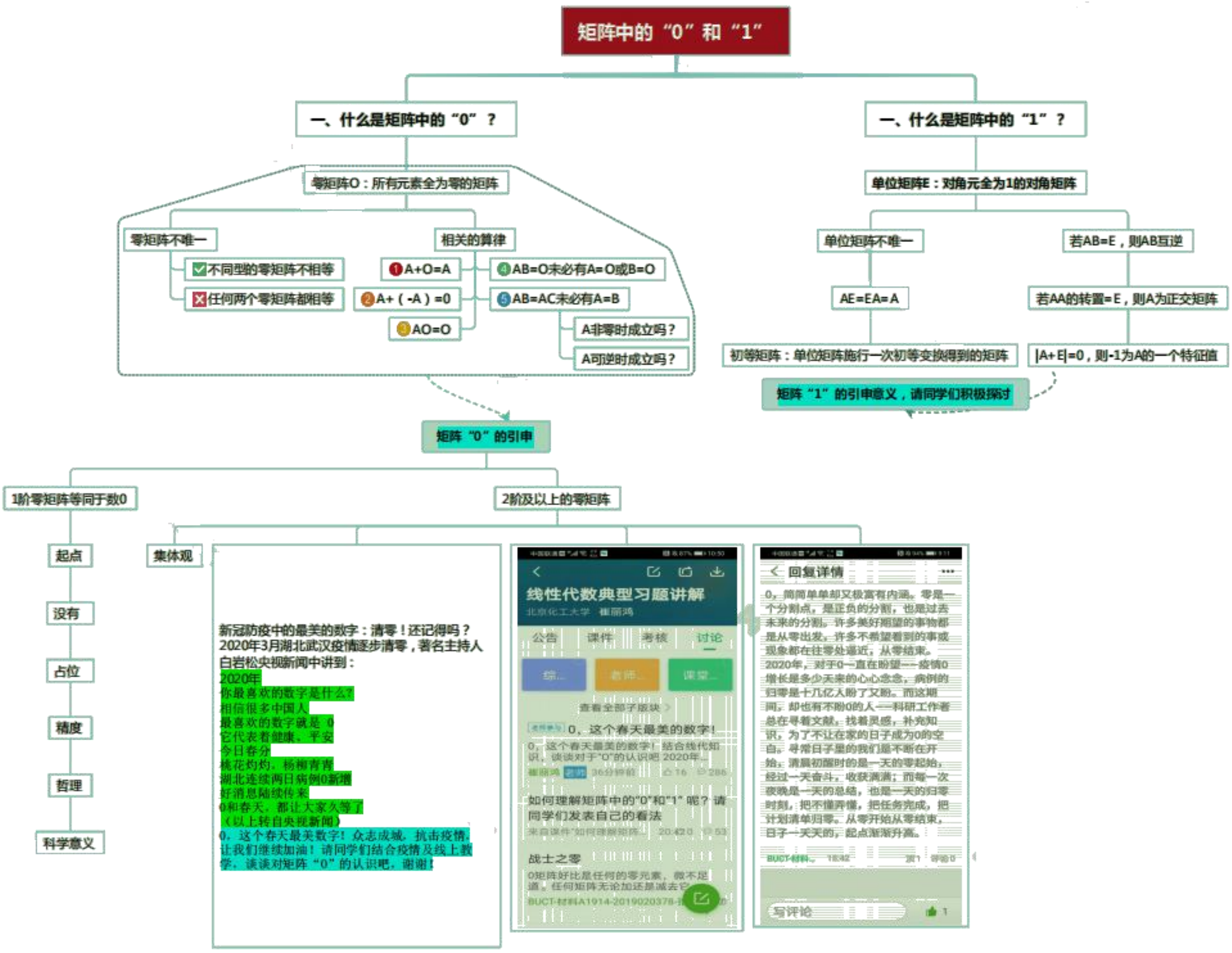
【结论 2】

若 A 是一个 n 阶方阵，E 是一个 n 阶单位阵，k 是一个数，则有

- $AE=EA=A.$
- $A(kE)=(kE)A.$

3. 课程总结

	数中的0和1	矩阵中的“0”和“1”
性质	• $a+0=a$ • $a+(-a)=0$ • $a\cdot 0=0$ • $ab=0\Rightarrow a=0$ 或 $b=0$ • $a^2=0\Rightarrow a=0$ • $a\neq 0,ab=ac\Rightarrow a=c$	• $A+O=A$ • $A+(-A)=O$ • $AO=OA=O$ • $AB=0\nRightarrow A=0$ 或 $B=O$ • $A^2=O\nRightarrow A=O$ • $A\neq O,AB=AC\nRightarrow B=C$
性质	• $a\cdot 1=a$	• $AE=EA=A$ • $A(kE)=(kE)A$



4. 从例题中总结零矩阵和单位阵的特点，获得人生感悟：

从零矩阵中感悟：科学的发展之路，有多少科学家经历了无数次失败，从头再来，一切清零，但成功恰恰建立在跌倒后从头再来的努力中，作为新时代的大学生，我们要不畏艰难，及时遇到挫折，也要从头再来，胜利就在前头。

从单位阵结论 1 中感悟，哪里需要，哪里有我，哪里放光彩，时刻准备，努力学习，时刻迎接机遇和挑战！

矩阵乘法与高铁换乘方案

矩阵的加法运算，数乘运算，叫做矩阵的线性运算，矩阵的乘法也是矩阵的常用运算。矩阵的幂运算是矩阵连乘，矩阵的乘法与高铁换乘方案，也体现了我们构建的线性代数“4模块”课程思政资源中围绕大计算和应用案例展开的线代之妙：通过本案例的教学，使学生达到如下目标：

一、 课程教学目标

作为解决线性方程的工具，矩阵在东汉前期的《九章算术》中就已经有所应用，帮助矩阵成为处理许多问题重要工具的手段就是矩阵的运算。而矩阵乘法是矩阵运算中的一种重要运算，更是一种应用性极强的运算。本教学案例，主要内容包含矩阵乘法定义、运算法则及条件。通过本案例的教学，使得学生达到如下三个目标：

（1）知识目标：会用数学语言描述矩阵乘法的定义，熟悉矩阵乘法的运算规则，理解矩阵乘法的运算条件。

（2）能力目标：在逻辑推理能力、抽象思维能力以及发现问题和使用数学软件的能力方面受到一定的训练。

（3）素质目标：增强学生对于抽象数学学习的兴趣和动力，借助新闻事实，点燃当代大学生的家国情怀和民族自豪感，潜移默化培养学生学以致用报效祖国的爱国情怀。

二、 课程育人目标

本案例精选响彻世界的“中国品牌”高铁，与学生产生共鸣，高铁不只是一种发明创造，更是志气的迸发和智慧的涌流。这再一次证明，勤劳智慧的中华民族现在也是能够有所发明有所创造的，也是能够为人类社会的发展作出巨大贡献的。使得学生增强民族自信心和民族自豪感，激发学生为祖国的繁荣昌盛而努力学习勇攀高峰的动力，树立为祖国的科技事业奉献终身的目标。同时，通过高铁出行或快运的出行方案选择，引出矩阵乘法的定义，帮助学生理解线性代数在实际应用中的作用和意义，懂得数学来源于生活，拉近学生与抽象概念的距离，增强学好线性代数的自信心，培养应用数学知识解决实际问题的能力。

三、 育人案例设计

教学内容	思政要素切入点	育人目标

（简述，不超过 50 字）	（100 字左右）	（100 字左右）
第 1 章 矩阵乘法 本教学案例，主要内容包含矩阵乘法定义、运算法则及条件。	通过引入“中国品牌”高铁，将热点时事思政元素与图论、最优化相结合，并引出本节内容矩阵乘法的定义，培养学生的家国情怀，民族自信；互动环节让学生编程实现高铁换乘方案，树立民族自豪感，自信心！	通过 70 年国庆大典科技创新方队中高铁方队，带领学生体会高铁出行，令学生深刻领悟中华民族智慧和“中国制造”能力，培养学生的家国情怀和民族自信。

四、 实施过程

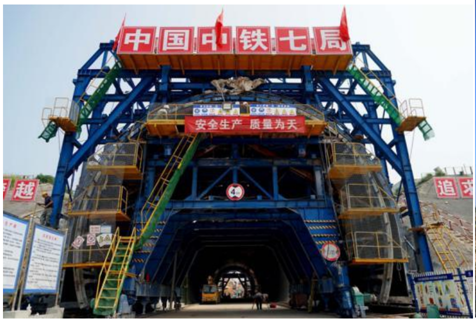
【学情分析】《线性代数》的授课对象是大一学生，这个阶段的学生还是延续了高中阶段的形象思维，对于线性代数过于抽象的知识体系并不能很好地接受。同时，他们思维活跃，但深度欠缺，具有对新知识的渴望与热情，也具有一定的提出问题，分析问题能力，但遇到复杂问题往往缺乏自信心，应用案例不易复杂，实际问题必须简化处理。

1. 开场开场第一句话先告知同学们本次课要讲的章节题目（矩阵乘法）、主要内容（矩阵乘法的定义及运算规则），并强调所要用到主要相关知识（矩阵定义及矩阵的线性运算）。以 PPT 形式呈现。

2. 问题导入

以吸睛的新闻图片，引起学生兴趣：这堂课讲些什么？“为什么它重要”？“为何我需要学它”？选取的图片和新闻主要聚焦在两点：

（1）通过 70 年国庆大典科技创新方队，首先映入眼帘的就是高铁，随后通过高铁路线的建设、高铁运营图片等，来说明党中央大力发展高铁的决心和努力。说明大国重器，科技创新开拓新时代的强国。

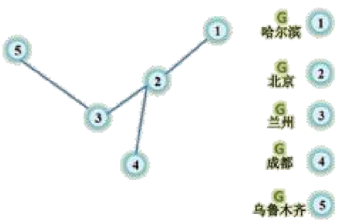


（2）通过双十一高铁急速达和高铁出行体验，说明高铁正在改变我们的生活。从容引出如何高效出行或配送呢？

3. 类比启发式，并设置问题链：

由问题，导入高铁线路地图，并举例，将问题引出——五座城市之间的出行路线数及出行方案问题。通过前面对矩阵概念的学习，带领学生一步一步从建立路线图到建立邻接矩阵，并理解邻接矩阵的含义。

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{，第 } i \text{ 个城市可以直达第 } j \text{ 个城市；}\\ 0 & \text{，第 } i \text{ 个城市不能直达第 } j \text{ 个城市.}\end{cases}\qquad a_{ii}=0$$



$$A=\begin{array}{c}\\ ①\\ ②\\ ③\\ ④\\ ⑤\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}① & ② & ③ & ④ & ⑤\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

设置问题链：那么如何用矩阵 A 表示换乘一次，从某站始发可以到达的城市呢？换乘方案有几种？具体的换乘方案是什么呢？

4. 对于设置的问题链，根据问题特点，采用不同方法各个击破，并适当运用雨课堂和智慧教学对学生进行实时了解和检测。具体地：

通过对邻接矩阵的分析，注重分析过程和科学思维方法的训练，带动学生一起讨论矩阵一行乘以矩阵一列对应元素求和的实际意义与应用；并让学生思考，什么样的两个矩阵才能实现行与列对应元素乘积呢，启发学生独立思考并给出矩阵乘法的条件。激发学生积极主动思考，并运用雨课

堂和智慧教学系统对学生进行实时小测，根据实时结果，发现问题，解决并及时讲解主要存在问题。

5. 抽象凝练形成定理：

获得乘法的定义、条件和运算法则。

设有两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$ 与 $B=(b_{ij})_{s\times n}$ 定义 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$，其中，$i=1,2,...,m$；$j=1,2,...,n$。

6. 应用并让学生提出新的问题，同时注重数学方法与现代数学软件的密切结合：

对一开始提出的高铁线路问题给与求解，并引导学生分析如何通过矩阵及其平方给出高铁出行方案，提出新问题。为拓展学生视野，实现数学方法和现代数学软件的密切结合。

7. 小结和思考、本次课需要达到的教学目标：

对本次课内容进行总结，并针对定义和运算的条件和运算法则提出深层的疑问，请同学们在课下思考并进入到我们的线性代数在线课堂进行互动讨论，相应的答案、作业和本次课需要达到的教学目标，也在网络课堂中查看。

8. 对预设置的机动题目课堂检测（取决于课堂时间）

要求学生课下进入在线课堂自我检查，并发现问题，及时查漏补缺。

逆矩阵与密钥

一、课程教学目标

矩阵是线性代数中的一个主要研究对象，矩阵方法是处理许多问题的重要工具，而逆矩阵又是矩阵中的一个至关重要的概念。本教学案例，主要内容包含逆矩阵的定义、唯一性和存在性。通过本案例的教学，使得学生达到如下三个目标：

知识目标：会用数学语言描述逆矩阵的定义，熟悉证明逆矩阵唯一性的思维方法，理解逆矩阵存在的条件（本案例只讲到了充分条件），了解伴随矩阵求逆的特点。

能力目标：在逻辑推理能力、抽象思维能力以及发现问题和使用数学软件的能力方面受到一定的训练。

素质目标：增强学生对于抽象数学学习的兴趣和动力，借助数学家的故事，点燃当代大学生的家国情怀和民族自豪感，潜移默化培养学生学以致用报效祖国的爱国情怀。

二、课程育人目标

本案例精选大数学家华罗庚在国家危难之时，学成归国，凭自己卓越的数学知识，熬一夜破解日本密码，用数学为抗战做出巨大贡献的小视频为引子，再借以习大大对我们身处网络时代，信息和网络对国家安全的金句告诫，抛出问题，从而以矩阵在密码学中的重要应用为线索，引出逆矩阵的概念，不仅展现了数学神秘面纱背后的应用魅力，激发了学生积极主动、探索发现的求知欲望，而且开阔了学生的视野，更润物无声潜移默化了学生的爱国情怀。在教学组织中，针对难点板书讲解、精心设计问题链、

注重定理形成过程、合理融入雨课堂、例题验证发现问题、适时呈现数学软件大计算，有效提升了学生探索创新和阳光积极的心态，以及综合运用能力的熏陶培养。

三、育人案例设计

教学内容 （简述，不超过 50 字）	思政要素切入点 （100 字左右）	育人目标 （100 字左右）
第一章 第 3 节逆矩阵	本案例精选大数学家华罗庚在国家危难之时，学成归国，凭自己卓越的数学知识，熬一夜破解日本密码，用数学为抗战做出巨大贡献的小视频为引子，再借以习大大对我们身处网络时代，信息和网络对国家安全的金句告诫，抛出问题，从而以矩阵在密码学中的重要应用为线索，引出逆矩阵的概念	通过逆矩阵的概念的教学，不仅展现数学神秘面纱背后的应用魅力，激发学生积极主动、探索发现的求知欲望，而且开阔了学生的视野，更润物无声潜移默化了学生的爱国情怀。在教学组织中，针对难点板书讲解、精心设计问题链、注重定理形成过程、合理融入雨课堂、例题验证发现问题、适时呈现数学软件大计算，有效提升了学生探索创新和阳光积极的心态，以及综合运用能力的熏陶培养。

四、实施过程

1. 开场：

开场第一句话先告知同学们本次课要讲的章节题目（逆矩阵）、主要内容（逆矩阵定义、唯一性和存在性），并强调所要用到主要相关知识（矩阵乘法和伴随矩阵的万能公式）。以 PPT 形式呈现，关键词以中英文两种形式

呈现在 PPT 上。

2. 问题导入：

以吸睛的图片和小视频形式，引起学生“上钩”：这堂课讲些什么？“为什么它重要”？“为何我需要学它”？选取的图片和小视频主要聚焦在两点：

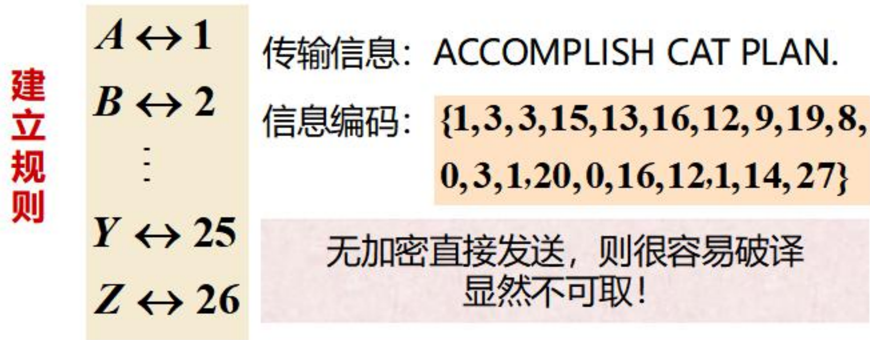
（1）借助大数学家华罗庚破解敌军密码，用数学为抗战做出贡献的小视频和图片。说明知识即战斗力，数学也可以是救国的武器。

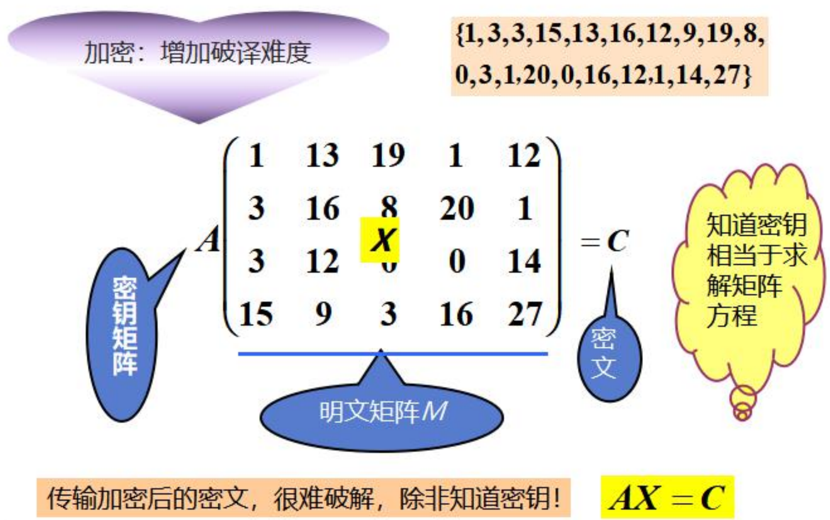

FOUR-ROTOR ENIGMA (GVG / PD)

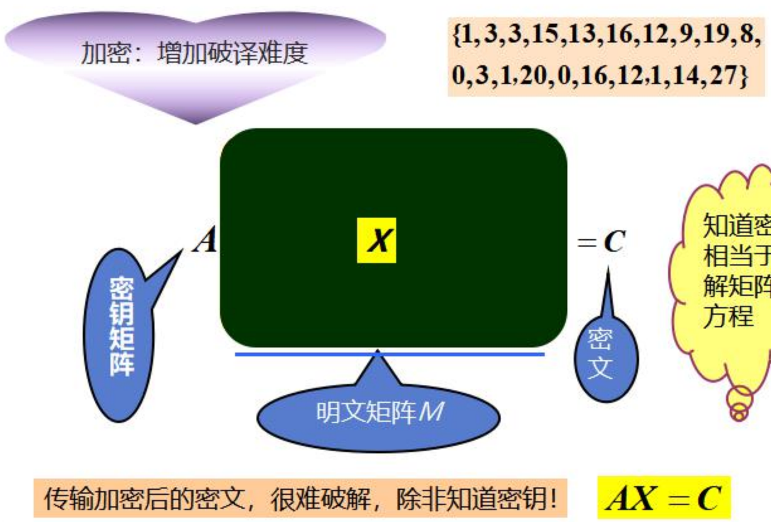
（2）以当今 5G 时代的来临，结合“美国棱镜门事件”和国内“徐玉玉事件”，并以我们的习大大论网络安全十大金句，说明信息和网络加密对国家和个人至关重要。

紧接着以信息加密问题为线索，得到矩阵方程 AX=C，由此提出研究逆矩阵的必要性和重要性。

引例：信息加密问题





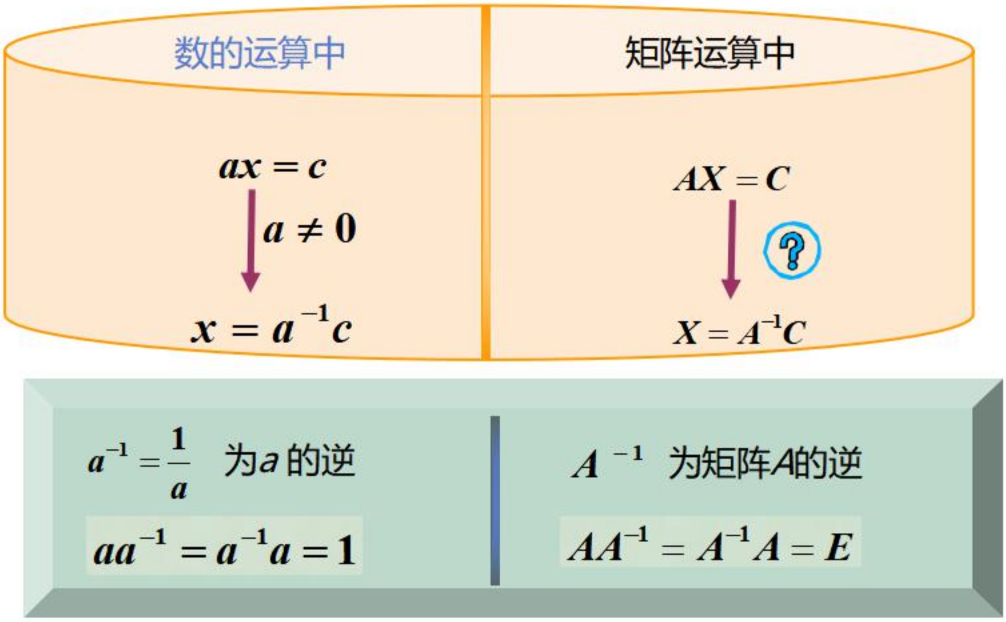


思政融入： 无论是战争年代，还是和平时期，信息的保密和加密都非常重要，尤其是在当今，我们已经开启5G时代，网络越来越发达，信息和网络的加密安全问题更加重要，大到国家军事政治机密安全，小到商业企业机密泄露、个人信息的泄露。我们的习大大论网络安全十大金句，告诫我们，没有信息和网络安全，就没有国家安全。

3.类比启发式，并设置问题链：

把问题导入中得到的矩阵方程AX=C和数中的一元一次方程类比，引出逆矩阵的定义。再启发学生与数的逆类比，设置问题链：若一个矩阵的逆矩阵存在，那么它是否唯一？非零数一定有倒数或者逆，那么非零矩阵是否可逆呢？如果不是，矩阵可逆的存在性条件是什么？如果可逆，如何求呢？

（1）类比-引出逆矩阵的定义和唯一性



逆矩阵的定义：设 A 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B，使得 AB = BA = E， 则称矩阵 A 为可逆的(invertible matrix) 。矩阵 B 称为 A 的逆矩阵(inverse matrix) .记为： $A^{-1}=B.$

对于逆矩阵存在唯一性的证明讲解，注重分析过程和科学思维方法的训练，采用板书形式；

唯一性：若 A 是可逆矩阵，则 A 的逆矩阵是唯一的.

证明:见板书.

（2）设置问题链

Question 1：任何非零矩阵都有逆矩阵吗？

考察：$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$

假设：$B=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$是$A$的逆矩阵

$$\because AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z&y+w\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\therefore A$不可逆

启示：非零矩阵未必可逆.

Question 2：矩阵可逆的条件是什么？如果可逆，如何求其逆？

4.对于设置的问题链，根据问题特点，采用不同方法各个击破，并适当运用雨课堂和智慧教学对学生进行实时了解和检测。具体地：

（1）对于非零矩阵是否可逆的问题，采用反例教学；

（2）对于逆矩阵的存在性问题，启发学生联想已储备的知识（将逆矩阵定义和伴随矩阵万能公式对比），激发学生积极主动思考，并运用雨课堂和智慧教学系统对学生进行实时小测，根据实时结果，发现问题，解决并及时讲解主要存在的问题。

请同学们结合已有的知识，联想对比，给出自己的想法。请用文字或者语音或者图片作答-进入雨课堂作答，时间 5 分钟。

启发：将逆矩阵的定义与伴随矩阵的万能公式对比：$AA^* = A^*A = |A|E$

由此，你能得出什么结论吗？

5.抽象凝练形成定理，并启发学生从中得到计算逆矩阵的步骤：

定理： 若$|A|\neq 0$，则方阵A可逆，并且$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，其中

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

从而得到逆矩阵存在的条件，同时还得到求逆矩阵的伴随矩阵方法；

6.应用并让学生提出新的问题，同时注重数学方法与现代数学软件的密切结合：

（1）对一开始提出的信息加密问题给与求解，并引导学生分析伴随矩阵求逆的利弊，提出新问题。

引例的解密：

设引例中的明文 X 按照 AX 加密后得到密文 C． 已知密钥矩阵 A 和密文矩阵 C 如下，请解密.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 10 & -6 & 31 & 23 & -2 \\ 54 & 39 & 137 & 104 & 78 \\ -12 & 22 & 21 & -6 & -40 \\ -22 & 9 & -51 & -43 & -14 \end{pmatrix}$$

【解】解密相当于求解矩阵方程，$AX=C \Rightarrow X=A^{-1}C$，$A$ 是 4 阶矩阵，需计算 16 个 3 阶和 1 个 4 阶行列式，共 17 个行列式-繁烦！

（2）为拓展学生视野，实现数学方法和现代数学软件的密切结合，在提出需要研究新方法必要性的同时，演示利用 MATLAB 软件进行计算的操作结果。

解决的方法：

方法一:利用 MATLAB 软件包计算(演示)

```
A=[1 -1 -1 1;3 0 -3 4;3 -2 2 -1;-1 1 2 -2];          % 定义密钥矩阵
M=[1 13 19 1 12;3 16 8 20 1;3 12 0 0 14;15 9 3 16 27]; % 定义明文矩阵
C=A*M                                                   % 利用矩阵乘法得密文矩阵
C =
    10    -6    31    23    -2
    54    39   137   104    78
   -12    22    21    -6   -40
   -22     9   -51   -43   -14

Transmission C                                %命令inv求矩阵逆
                                               %利用逆矩阵解密密文
receiveM =inv(A)*C              %解密后的密文

    1.0000   13.0000   19.0000    1.0000   12.0000
    3.0000   16.0000    8.0000   20.0000    1.0000
    3.0000   12.0000    0.0000    0.0000   14.0000
   15.0000    9.0000    3.0000   16.0000   27.0000
```

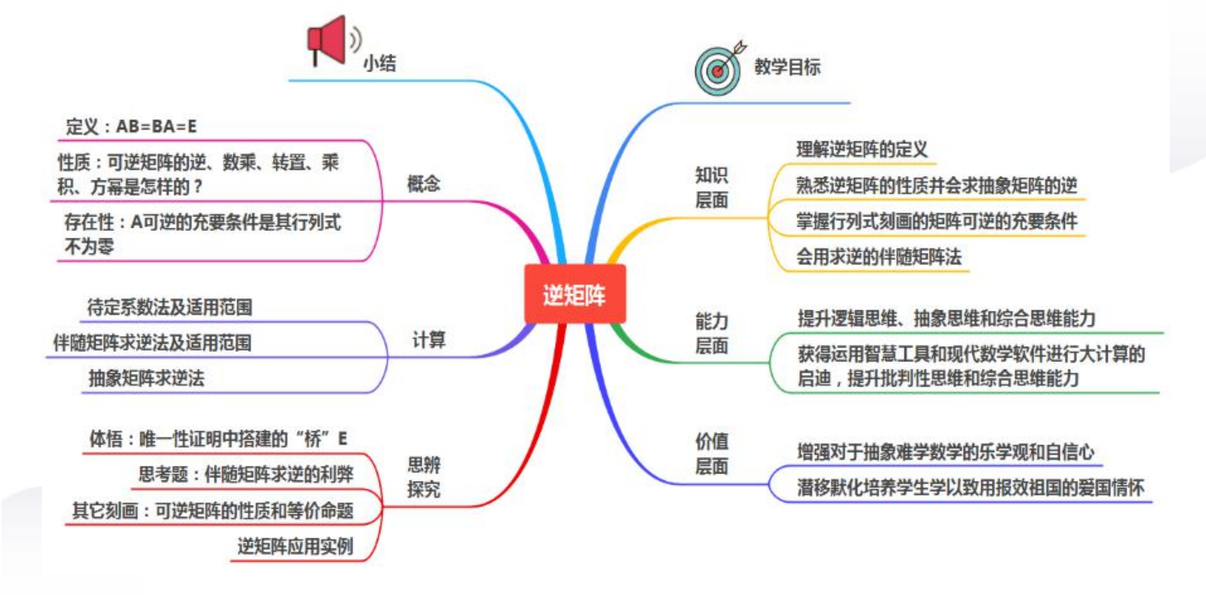
方法二:初等变换的方法（后面章节将要介绍）

7.小结和思考、本次课需要达到的教学目标：

对本次课内容进行总结，并针对定义和定理的条件和结论提出深层的

疑问，请同学们在课下思考并进入到我们的线性代数在线课堂进行互动讨论，相应的答案、作业和本次课需要达到的教学目标，也在网络课堂中查看。

小结：



目标：

知识层面：理解并会用数学语言表述逆矩阵的定义和唯一性，掌握逆矩阵存在的条件。

能力层面：逻辑思维、数学软件、提炼问题。

价值引领：向大数学家一样学以致用、报效祖国。

8.对预设置的机动题目课堂检测（取决于课堂时间）

要求学生课下进入在线课堂自我检查，并发现问题，及时查漏补缺。

范德蒙行列式

行列式按行按列展开，是行列式的递归定义，将高阶行列式用低阶行列式表示出来。根据这个定理，可以证明范德蒙行列式的值。范德蒙行列式在通信安全中的应用，也体现了我们构建的线性代数“4 模块”课程思政资源中围绕大计算和应用案例展开的线代之妙：通过本案例的教学，使学生达到如下目标：

一、 课程教学目标

1. 知识目标：通过案例导引，激发学生学习兴趣，针对学生专业，展开通信中搭线窃听概念，引入防窃听方法，讲解行列式按行按列展开原理，使学生掌握范德蒙行列式定义，性质，根据范德蒙德行列式的特点,可以将所给行列式化为范德蒙德行列式,以及范德蒙行列式在防搭线窃听中的应用。
2. 能力目标：通过学习，让学生理解范德蒙行列式的性质，培养学生逻辑思维能力，计算能力，分析问题、解决问题能力；
3. 素质目标：通过实际应用案例，培养学生的价值观，是非观，责任感及培养学生的 国家安全意识，科技报国的决心。

二、 课程育人目标

通过问题驱动案例、课堂互动、例题三个环节，令学生深刻领悟随着互联网的飞速发展，信息的机密性、完整性、可用性常常受到破坏，信息安全至关重要。网络安全是网络编码的重要应用领域之一。培养学生信息安全，国家安全意识。

三、 育人案例设计

教学内容 （简述，不超过 50 字）	思政要素切入点 （100 字左右）	育人目标 （100 字左右）
2.3 行列式按行按列展开。 行列式按行按列展开定理。 给出范德蒙行列式的定义，性质，证明其值。例题讲解将所给行列式化为范德蒙德行	通过电影窃听风云，引入网络安全，并结合美国在 1990 年即将网络攻击武器视为与核、生化武器并列的大规模破坏性武器，进而从三个层面认知网络安全的重要性，培养学生的是非观、价值观。国家安全意识，及科技兴国、报国的决心。	通过影视作品引入信息安全性认知的三个层面，令学生深刻领悟网络安全的重要性，体会网络安全的战略地位，培养学生的科学素养、逻辑思维能力、分析能力、总结能力

列式，巧妙计算其值。		以及责任担当。

四、 实施过程

【学情分析】《线性代数》的授课对象是大一学生，这个阶段的学生还是延续了高中阶段的形象思维，对于线性代数过于抽象的知识体系并不能很好地接受。同时，他们思维活跃，但深度欠缺，具有对新知识的渴望与热情，也具有一定的提出问题，分析问题能力，但遇到复杂问题往往缺乏自信心，应用案例不易复杂，实际问题必须简化处理。

【1. 开场】借助影视海报，通过剧情简介，引发学生思考正确的价值观，职业观、培养学生的责任感。

全球金融市值一度超越二十万亿的香港证券市场，引来不少金融大鳄的觊觎，其中头号目标是有绰号“老板”之称的幕后黑手！警方调查上市公司“风华国际”涉嫌内幕交易案，成立行动代号为“追风”窃听小组全力侦察。

窃听精英梁俊义是小组的主管，行动中他与同袍老警员杨真、新扎师兄、网络天才林一祥，负责监听“风华国际”几个高层人员的办公室及会议室里的电话系统。三人小组乔装进入“风华国际”，巧妙地布置下各种偷听及监视仪器的疑阵，展开窃听行动。

一次偶然的机会，三人从窃听仪器中，窃听到“风华国际”几个高层人员正计划将公司股价，从 0.2 港元钱炒高至 1.2 元。因为个人私欲，三人决定对上司隐瞒消息，然后在股票市场下注，赚下这笔意外之财，却不料，螳螂捕蝉黄雀在后，三人的这次秘密行动早已落入他人的观测之中……

【2. 问题导入】由电影引出信息安全性认知的三个层面，结合 2021 年 10 月的网络安全教育，让学生认识到网络安全的重要性。

第一个层次：信息系统被攻击、入侵、染毒等都是重要的信息安全事

件，必须高度重视并迅速解决。

第二个层次：美国在1990年即将网络攻击武器视为与核、生化武器并列的大规模破坏性武器，网络攻击武器是实现“不战而屈人之兵”的最有效武器之一。

第三个层次：与领土、领海、领空一样，网络疆域是国家疆域不可分割的一部分，是不容侵犯的国家疆域。

随着互联网的飞速发展，信息的机密性、完整性、可用性常常受到破坏，信息安全至关重要。网络安全是网络编码的重要应用领域之一。

【3.案例启发式，化深为浅，激发研究性、自主性学习】对案例的主要实施技术和过程简化，用学生听得懂，看得明白的形式展现，让数学回归应用的本源，让线性代数应用化，具体化，克服学生学习的畏难情绪，引导学生自主学习。行列式按行按列展开定理教学过程中贯彻以学生为中心，通过教师引导和学生邻桌讨论，让学生自己发现，并找出行列式按行按列展开形式，进而总结出按行按列展开定理。培养学生的科学素养、逻辑思维能力、分析能力、总结能力。

介绍拜占庭攻击：

区别于普通的窃听攻击，拜占庭属于主动式攻击，攻击者的主要目的在于篡改信道中传输的数据，以使下游节点或者接受者节点无法收到正确的数据或是收到已经被攻击者修改过的数据，其根本目的是使源节点无法为接受者节点提供有用数据。如何实现信息的加密？同学们有哪些好方法？激发学习兴趣，加深学生的探索欲，求知欲，以及用线性代数解决实际问题的动力 。

【4.定义凝练】有一种基于范德蒙行列式的随机网络编码，通过添加Target位来实现抗拜占庭攻击。

范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i - x_j). \quad (1)$$

网络模型

线性代数不再抽象而拒人于千里之外。利用数学软件，学生可以：亲

身体验矩阵。

对于一个无环多播网络 G=（V，E），其中 V 是网络中节点集合，E 是信道集合。假定源节点发出的信息形式如下：

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

X_i，$i=1,2,\cdots,m$ 为信息包，信道 $e_j\in E$，传输的数据为 $P_{e_j}X$，其中 P_{e_j} 是一个 m 维向量，是 e_j 上的全局编码向量。

攻击模型：

考虑单信源、单信宿的简单模型：

设信道集合 $\Lambda=\{A_1,A_2,\cdots,A_{|\Lambda|}\}$，其中 $A_i\in E$ 是攻击者单位时间内能窃听到的信道，且集合 Λ 不随时间而变。令 $K=\max\{k_1,k_2,\cdots\}$，其中 k_i，$i=1,2,\cdots$ 表示单位时间能窃听到的信道数量，$K\le|\Lambda|$

【5. 学情检测】

编码方式

首先生成 m 个随机数 $r_1,r_2,\cdots,r_m$，构造形如范德蒙行列式的编码矩阵P：

$$P=\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^m & r_2^2 & \cdots & r_m^m \end{pmatrix} \quad (3)$$

对消息X，左乘P

$$\tilde{X}=P\cdot X=\begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \cdots & \tilde{x}_{1n} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \cdots & \tilde{x}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_{m1} & \tilde{x}_{m2} & \cdots & \tilde{x}_{mn} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\tilde{X} = P \cdot X = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \cdots & \tilde{x}_{1n} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \cdots & \tilde{x}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_{m1} & \tilde{x}_{m2} & \cdots & \tilde{x}_{mn} \end{pmatrix}$$

在 $\tilde{X}$ 的信息包的末尾添加一个冗余信息，产生新的信息源

$$\tilde{X}' = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \cdots & \tilde{x}_{1n} & r_1 \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \cdots & \tilde{x}_{2n} & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{x}_{m1} & \tilde{x}_{m2} & \cdots & \tilde{x}_{mn} & r_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X}'_1 \\ \tilde{X}'_2 \\ \vdots \\ \tilde{X}'_m \end{pmatrix} \qquad (5)$$

在信息包的末尾添加 s 个冗余信息，则添加s列

【6.深化定义，加深理解】通过例题来计算范德蒙行列式。掌握范德蒙行列式的性质和特点。

【7.案例实现，加深矩阵概念的深度和广度】为抗击拜占庭，设信宿接收到的信息包个数为 m+1 个，构建一哈希函数 h(x)，且信宿掌握该哈希函数。抗拜占庭，关键在于接收者能否将信源信息的 m 个信息包和信源向网络中添加的 s 个信息包加以区分，故在　上添加 Target 位

$$\tilde{X}' = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \cdots & \tilde{x}_{1n} & r_1 & t_1 \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \cdots & \tilde{x}_{2n} & r_2 & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{x}_{m1} & \tilde{x}_{m2} & \cdots & \tilde{x}_{mn} & r_m & t_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X}'_1 \\ \tilde{X}'_2 \\ \vdots \\ \tilde{X}'_m \end{pmatrix} \qquad (6)$$

其中

$$t_i = h(r_i)\ , i = 1, 2, \cdots, m.$$

这样，即使攻击者添加 s 个信息包，但由于其不知道信源及信宿端使用的哈希函数，无法确保其所添加的 Target 位的值满足哈希函数，故接收方可以轻松区分哪些数据包来自源节点，并可轻松解码。

利用范德蒙行列式并添加 Target 位实现抗拜占庭,从而实现网络安全。

学以致用，增强自信，激发学生的学习热情和兴趣，增强学生学好线性代数的信心 。

【8.小结和思考、本次课需要达到的教学目标:】

对本次课内容进行总结，并针对定义理解和应用提出深层的疑问，请同学们在课下思考并进入到我们的线性代数在线课堂进行互动讨论，相应

的答案、作业和本次课需要达到的教学目标，也在网络课堂中查看。

矩阵的秩

一、课程教学目标

矩阵的秩是线性代数中的重难点概念，几乎贯穿于整个线性代数学科，结合疫情下遵守校园“秩”序的意义以及日常生活学习中“秩”序井然做事的良好习惯，强调线性代数中的“秩”体现了数学中的概括美和统一美。通过本案例的教学，使学生达到如下目标：

知识目标：理解矩阵秩的定义和基本性质，领悟秩的内涵，理解并熟练掌握求秩的初等变换方法。

能力目标：多角度认识矩阵的秩，初步体悟线性代数学科思想，提升探究和高级思维能力，获得运用智慧工具和现代数学软件进行大计算的启迪，提升批判性思维和和综合思维能力。

素质目标：通过授之以鱼（知识）、渔（方法），喻（思想），让学生从单纯掌握线性代数知识、方法提升为深刻体悟学科思想、实现思维能力上的飞跃。

二、课程育人目标

通过有机融入数学文化、高阶性案例、学术科研成果，让学生感受到数学学科中蕴含的美学哲理、科学精神和现代算法的魅力，认识到线性代数是解决实际问题和大数据处理与计算的有力武器，增强对于抽象难学数学的乐学观和自信心，激发求知欲和学习动力，唤起好奇心和学习热情。

三、育人案例设计

教学内容 （简述，不超过 50 字）	思政要素切入点 （100 字左右）	育人目标 （100 字左右）
第 3 章 第 3 节矩阵的秩	通过呈现不同教材中矩阵秩的等价定义、秩的教学研究和科研论文，引出人脸识别，并自然融入战疫情下遵守“秩”序的意义，结合人脸识别算法与奇异值，奇异值与矩阵秩的关系，让学生感受到线性代数是解决实际问题和大数据处理与计算的有力武器。从而训练科学本领，培养科研探索能力，孕育勇攀高峰精神。	通过有机融入数学文化、高阶性案例、学术科研成果，让学生感受到数学学科中蕴含的美学哲理、科学精神和现代算法的魅力，认识到线性代数是解决实际问题和大数据处理与计算的有力武器，增强对于抽象难学数学的乐学观和自信心，激发求知欲和学习动力，唤起好奇心和学习热情。

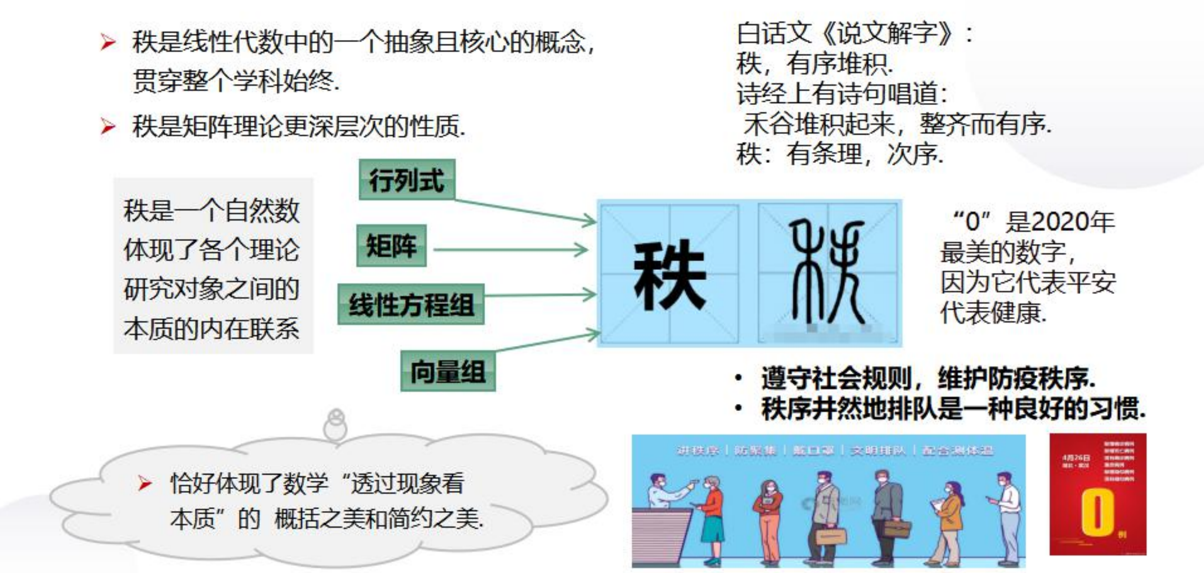
四、实施过程

教学过程：采用问题+任务驱动，线上+线下混合，BOPPPS 模型+知识构建，启发式、直观演示、互动式和探究式等多种教学方法。

1.主题-思维导图导入-课前任务 1 反馈

（1）从课前几天发布在在线平台单元学习（按次）栏目下的思维导图开篇，一方面强调本节课讲什么，另一方面开始点评课前布置任务。

（2）课前任务 1 是一个有关“秩”的开放性题目，一方面自然融入疫情下遵守校园秩序的意义以及日常生活学习中秩序井然做事的良好习惯，另一方面，强调线性代数中的“秩”将体现数学中的概括美和统一美，进一步点评 2 个亮点：MATLAB 的自我学习能力，查阅教学研究论文能力。



2.追根溯源-智慧工具摸底小测-实时反馈-知识深化

（1）从字面猜测的开放性问题点评，到提出：究竟什么是秩呢？进入追根溯源，从原始定义引出需要课前自学完的 k 阶子式概念。

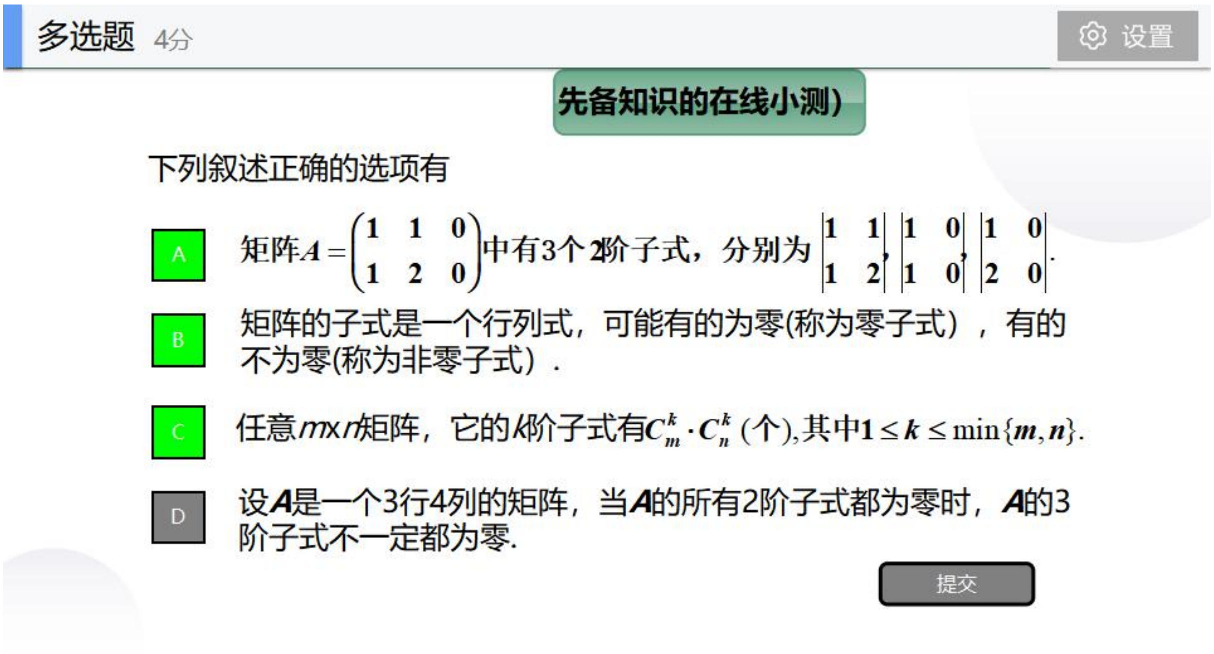
在矩阵论的发展史上，矩阵秩的概念，最早是由德国数学家弗罗贝尼乌斯（T.G.Frobenius）在 1879 年提出来的.在他的论著中，是这样叙述的：

如果一个矩阵的所有 $r+1$ 阶子式为零，但至少有一个 r 阶子式不为零，那么

就称 r 为这个矩阵的秩.

现在，大多数线性代数教材包括我们正使用的教材都沿用了这个定义. 不过，定义中出现了“r 阶子式”的概念. 同学们都完成课前的自学了吗？

（2）开始利用智慧工具进行前侧（摸底检测课前自学任务情况），根据实时反馈数据，发现不足，对矩阵秩的定义再加工的讲解。



夯实基础：

设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$，得到矩阵 A 的一个三阶子式

矩阵 A 的 2 阶子式

$$D_3(A)=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

同理，A 中任取一个 3 阶子式都可由它的 2 阶子式来表示 .

结论：矩阵 A 中任何一个 $k+1$ 阶子式（如果存在的话）都可以用它的 k 阶子式来表示.

若 A 的所有 $r+1$ 阶子式都为零，则阶数高于 $r+1$ 的子式（如果存在的话），必然都为零.

引发思考：同学们都明白了吗？当你再次遇到 k 阶子式的相关问题，能不能做到胸有成竹呢？

趁热打铁：如果在矩阵 A 中，①存在一个 r 阶子式 $D_r(A)\neq 0$；②任意的 $r+1$ 阶子式 $D_r(A)$ 都为零，请问 A 中存在阶数高于 r 的非零子式吗？–绝对不存在

因此 $D_r(A)$ 是 A 中的一个阶数最高的非零子式.

于是就有了如下，矩阵秩的定义：

一、矩阵秩的定义：

定义 1：如果在矩阵 A 中存在一个不等于 0 的 r 阶子式 $D_r(A)$，并且所有 $r+1$ 阶子式全等于 0（如果存在的话），则称 D_r 为矩阵 A 的最高阶非零子式， 其中数 r 称为 A 的秩（Rank）. 记作 $R(A)$ 或 $r(A)$ ，并规定 $R(0)=0$.

定义 2：矩阵 A 的非零子式的最高阶数称为 A 的秩 ，记作 $R(A)$ 或 $r(A)$，并规定 $R(0)=0$.

【例 3.1】 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}$，求 A 的秩。

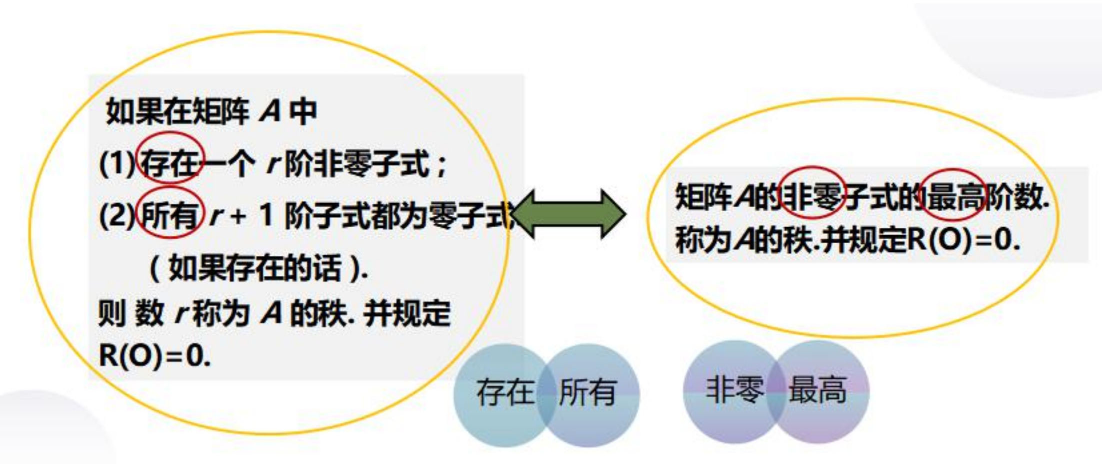
【解】因为

$D_1(A)=|1|=1\neq 0$，

$D_2(A)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 0\end{vmatrix}=0$，所以 $R(A)=1$

3. 写板书设置问题，采用启发式-探究思考-问答-配对-参与等方法，动画深入-引出结论，增加学生体验获得感。

邻桌讨论：在秩的定义中，“存在和所有（或 非零和最高）”只出现一个（看黑板），此时 R(A)与 r 具有什么关系？反之如何？



我问你答：$R(A)$ 与 $R(A^T)$ 的关系

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\\ a_{14} & a_{24} & a_{34}\end{pmatrix}$$

A^T 的子式与 A 的子式对应相等，从而 $R(A^T)=R(A)$．

进一步思考：$R(kA)$ 与 $R(A)$, $k\neq 0$ 的关系

$$A=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & ka_{14}\\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & ka_{24}\\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & ka_{34}\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}$$

矩阵 kA 的一个 2 阶子式 $D_2(kA)=k^2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=k^2D_2(A)$，$D_2(A)$ 为矩阵 A 的一个 2 阶子式，因此，当 k 不等于零时，kA 的子式与 A 的子式是非零常数倍的关系，要么同时为零，要么同时不为零，从而 $R(kA)=R(A)$.

二、矩阵秩的基本性质

1. $0\le R(A_{m\times n})\le \min\{m,n\}$.
2. A 中存在 r 阶非零子式 $\Leftrightarrow R(A)\ge r$.
3. A 中所有的 $r+1$ 阶子式都为零 $\Leftrightarrow R(A)\le r$.
4. $A\ne O\Leftrightarrow R(A)\ge 1$.
5. 对 n 阶方阵 A, $|A|\ne 0\Leftrightarrow R(A)=n$.　A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 满秩 $\Leftrightarrow$ A 非奇异
6. 对于 n 阶矩阵 A, $|A|=0\Leftrightarrow R(A)<n$.　A 不可逆 $\Leftrightarrow$ A 降秩 $\Leftrightarrow$ A 奇异
7. $R(A^T)=R(A)$.
8. $R(kA)=R(A), k\ne 0$.

4. 知识巩固进阶-雨课堂后测-实时反馈

单选题 2分　　设置

设3阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$，若 $R(A)=2$，则下列选项正确的是

雨课堂

A. $x\ne -2, x=1$

B. $x=-2, x=1$

C. $x=-2, x\ne 1$

D. $x\ne -2, x\ne 1$

【解】$R(A)=2\Rightarrow |A|=0$

$|A|=(x+2)(x-1)^2$

$x=-2,\quad x=1$ (舍去)

提交

5. 延伸拓展-化抽象为可视化-高阶思维

拓宽延伸 1：由于线性代数的学科特点和矩阵秩的深刻性，不同的教材也许有不同的处理方式. 对于矩阵秩的定义，总结起来有如下三种：

（1）借助行列式定义：矩阵 A 的非零子式的最高阶数称为 A 的秩.

（2）借助阶梯形定义： 矩阵 A 的阶梯形的非零行的个数称为 A 的秩.

（3）借助向量组的秩定义：矩阵 A 的行秩与列秩统称为 A 的秩.

姜广峰，崔丽鸿.
线性代数.
高等教育出版社，2015

孙良，闫桂峰.
线性代数.
高等教育出版社，2016

王萼芳，石生明.
高等代数（第三版）.
高等教育出版社，2003

希望同学们在阅读线性代数参考书时，注意教材体系的各自特色和知识的先后顺序.

拓宽延伸 2. 由于矩阵的秩几乎贯穿于整个线性代数学科，对矩阵秩的多角度理解是一个循序渐进不断加深的过程，例如

形象化的例子： 矩阵的秩可以理解为图像经过矩阵变换之后的空间的维数.

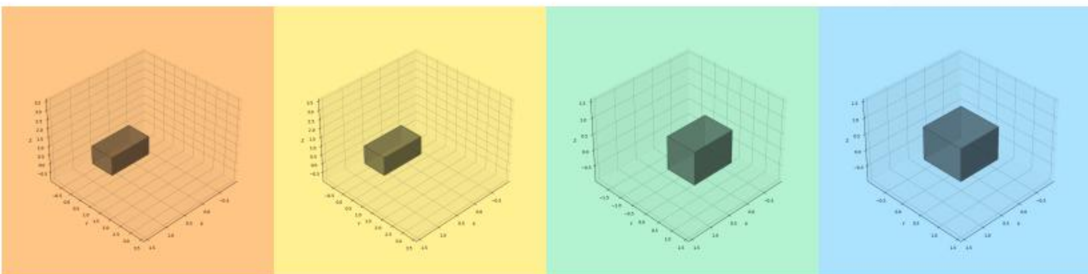


Fig.1　　Fig.2　　Fig.3　　Fig.4

序号	变换前	秩	变换后
Fig.1	3维空间中的长方体	R（A）＝3	长方体
Fig.2	3维空间中的长方体	R（A）＝2	矩形域
Fig.3	3维空间中的长方体	R（A）＝1	线段
Fig.4	3维空间中的长方体	R（A）＝0	点

6. 思政融入：教学和科研论文-疫情下的“秩”序-机器学习算法：

(1)通过呈现不同教材中矩阵秩的等价定义、秩的教学研究和科研论文，引出人脸识别，并自然融入战疫情下遵守“秩”序的意义。

(2)结合人脸识别算法与奇异值，奇异值与矩阵秩的关系，让学生感受到线性代数是解决实际问题和大数据处理与计算的有力武器。从而训练科学本领，培养科研探索能力，孕育勇攀高峰精神。

7. 启发-发现-计算软件

计算探究：

【例3.2】 求矩阵 $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩.

【解】$\because$ B是一个行阶梯形矩阵，非零行只有3行，

故B的所有4阶子式全为零.

以非零行的第一个非零元为对角元的3阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \therefore R(B)=3.$$

结论：行阶梯形矩阵的秩等于它的非零行个数

【例3.3】已知

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & 5 \\ -1 & 2 & 6 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 12 & 10 & 7 \\ 5 & 2 & 21 & 16 & 19 \end{pmatrix}$$

求$R(A)$.

【分析】在A中,2 阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

繁烦

3 阶子式共有 $C_5^3C_5^3=100$

4 阶子式共有 $C_5^4C_5^4=25$

如何解决呢?

例1表明:

行阶梯形矩阵的秩就等于非零行的行数

任何矩阵都可以经初等变换化为行阶梯形矩阵

一个自然的想法是:

能否将求秩的问题转化为求一个行阶梯形矩阵的秩呢?

下节课内容

初等变换是否改变矩阵的秩呢?

方法1：矩阵秩的初等变换法

8. **小结**-思维导图展示，课后环节的作业、在线小测、探索思考、小组讨论、阶段性思维导图布置等任务。（45 分钟课结束）

9. **教学后记：**经课后答疑、改作业、在线小测等返回后再总结填写。改进提升本堂课教学。

线性方程组的有趣应用

一、课程教学目标

线性代数与高等数学、概率统计等其他工科数学相比，内容抽象、枯燥、乏味，需要学生有较强的抽象思维与逻辑推理能力，这使得同学们缺乏学习的积极性。但是线性代数作为一种数学工具，它的理论和方法在物理 、化学 、工程技术、生物技术 、国民经济和航空等领域都有着广泛的应用。通过本案例的教学，使得学生达到如下三个目标：

知识目标：通过介绍线性方程组的应用实例，把某路段高速公路网络的交通流量问题转化为线性方程组，将交通出行中某些突发情况转化为线性方程组解的分析，熟练掌握线性方程组解的判定与求解。

能力目标：使同学们体会线性方程组的实际应用，理论联系实际，用所学解决实际问题，更加透彻理解线性方程组解的结构和求解方法，以及多解的线性方程组的实际意义，做到学以致用，提高同学们在实践中发现问题、分析问题、解决问题的能力。

素质目标：通过案例体会到学习线性代数的乐趣，看到线性代数的魅力和威力，从而端正学习态度，树立更加明确的学习目标和方向，学好这门课程，奠定良好的学科基础，成长为祖国建设的有用人才。

二、课程育人目标

交通是连接各城市、乡村的重要纽带，也是其发展的主要动力，交通除了便于出行，在经济发展、物流、人类现代化建设和文化交流中起着重要积极的作用和影响。通过本案例的学习，提高同学们在实践中发现问题、

分析问题、解决问题的能力，希望同学们从中体会如何将实际问题-交通问题转化为正在学习的线性代数中的方程组的理论，感受到线性代数不仅是一门学习其他学科的必修课，同时也是解决实际问题不可或缺的一种数学工具，从而激发同学们的学习热情，树立学好这门课程的信心和决心，更加努力积极地投入到线性代数的学习中去，为将来参加祖国的建设奠定良好的学科基础，更好地服务于我们的社会和国家。

三、育人案例设计

教学内容 （简述，不超过 50 字）	思政要素切入点 （100 字左右）	育人目标 （100 字左右）
第三章 第 4 节线性方程组有解的判定与求解	通过介绍线性方程组的应用实例，把某路段高速公路网络的交通流量问题转化为线性方程组，将交通出行中某些突发情况转化为线性方程组解的分析，从而将交通问题转化为正在学习的线性代数中的方程组的理论。	通过本案例的学习，提高同学们在实践中发现问题、分析问题、解决问题的能力，希望同学们从中体会如何将实际问题-交通问题转化为正在学习的线性代数中的方程组的理论，感受到线性代数不仅是一门学习其他学科的必修课，同时也是解决实际问题不可或缺的一种数学工具，从而激发同学们的学习热情，树立学好这门课程的信心和决心，更加努力积极地投入到线性代数的学习中去，为将来参加祖国的建设奠定良好的学科基础，更好地服务于我们的社会和国家。

四、实施过程

在学习并掌握线性方程组有解的判定与求解这一章节的学习时，借助图示、图片、表格等，引入生动形象的应用案例-如何计算某路段高速公路网络的交通流量问题，启发式地将所学理论内容融入到实践中去，提炼数学模型，并在案例中，引导学生分析交通出行中遇到的某些突发情况如道路封闭、交通中出现的某些特殊情况如最小交通流量问题、解中出现负值进行讨论，理解线性方程组解的实际意义。

思政融入-用线性方程组的具体应用实例，充分调动起学生学习的积极性和兴趣，并借此融入思政内容---要致富先修路，交通是一个城市发展的动脉，道路只有经过合理的规划，才能充分发挥投资效益，否则有的道路交通拥挤，交通量过于饱和，而有的道路交通较少，这样道路网的效益无法最大程度的发挥，造成经济效益和社会效益的损失，通过高速公路网络交通流量的讨论，激发学生的学习热情和动力，树立为祖国建设而努力学习的信心和决心。具体教学过程如下：

1. 简述同学们在学习这门课程中存在的问题和困惑：

线性代数是研究有限维空间中线性关系的理论和方法的一门代数学分支，起源于十七世纪。线性代数与高等数学、概率统计等其他工科数学相比，内容抽象、枯燥、乏味，需要学生有较强的抽象思维与逻辑推理能力，这使得同学们缺乏学习的积极性。

2. 指出线性代数在各领域的重要性：

线性代数作为一种数学工具，它的理论和方法在物理 、化学 、工程技术、生物技术 、国民经济和航空等领域都有着广泛的应用。

3. 强调线性方程组在线性代数中的核心地位及多解的线性方程组实际应用和意义：

线性方程组是线性代数的核心，为了研究一般的线性方程组，引入了向量、矩阵等概念。通过下面的应用实例，说明线性方程组的应用，以及多解的线性方程组在实际问题中是如何自然产生的，我们一般见到的方程组多是只有唯一解或无解。

4. 通过图示和直观形象的例子简介案例背景知识：

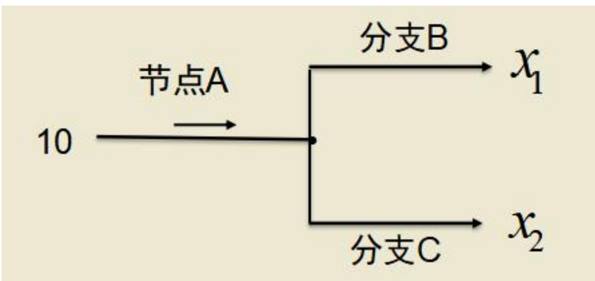
（1）简单介绍网络流与线性方程组的关系。

科学家、工程师或经济学家研究某些数量在网络中的流动时，很自然地会推导出线性方程组。例如，城市规划和交通工程人员监控一个网格状的市区道路的交通流量模式；电气工程师计算流经电路的电流；经济学家通过分析经销商和零售商的网络，了解从制造商到顾客的产品销售情况。许多网络中的方程组涉及成百甚至上千个变量和方程。

（2）借助图示与简单的例子，由浅入深介绍网络流的组成与网络流的性质。

一个网络包含一组称为节点的点集，部分或全部的节点由称为分支的线或弧连接，流的方向标示在每个分支上，流量标示在各分支上或用变量标示。

网络流的基本假设是网络的总流入量等于总输出量，且流经每一个节点的总输入等于总输出。



例如，上图中10个单位的流量经过一个分支流入节点A，又经分支B和C流出，因为流量在每个节点是平衡的，所以可以得到方程 $x_1+x_2=10$。

类似地，每个节点的流量都可以用一个方程来描述，最后可以得到一个线性方程组。网络分析的问题就是当局部信息（如网络的输入）已知时，确定每一分支的流量。

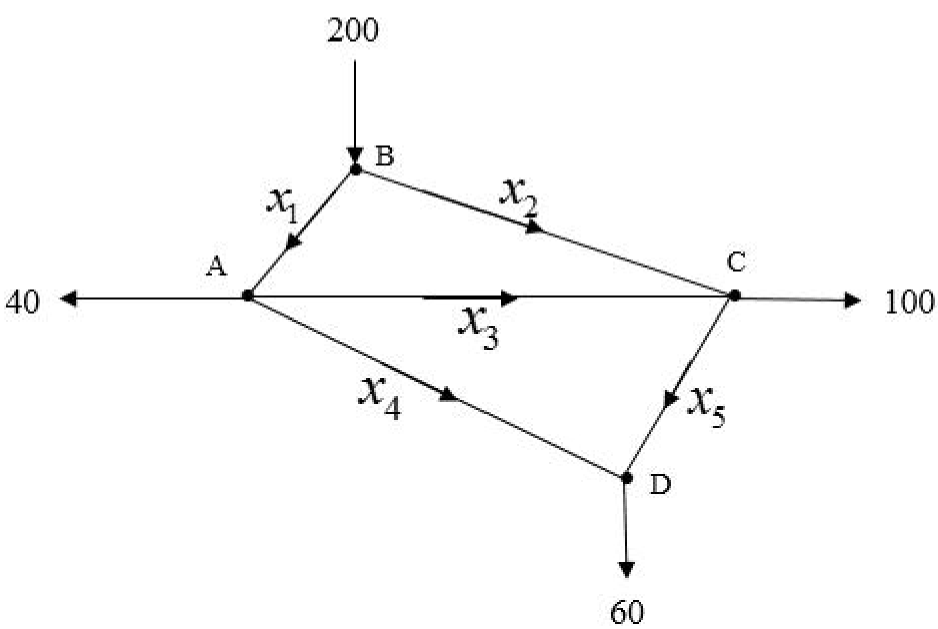
5. 引入具体案例：

给出某一路段的高速公路网络图，根据网络流的性质建立线性方程组，将实际问题转化为线性代数中的数学模型，利用线性方程组的解的判定及其求解的理论，对解进行讨论，说明线性方程组的实际应用。

【例】（1）求图中某路段高速公路网络的车流量，流量以车辆数/分钟计算。

（2）求支路 x_4 的道路封闭时，交通流量的通解。

（3）当 $x_4=0$ 时，x_1 的最小值是什么?



【解】（1）启发同学们根据前面的准备知识，把该问题转化为线性方程组。在每个交叉路口（节点），利用节点的平衡性质：车辆驶入数目等于车辆使出数目，根据图示写出该流量的方程组。

交叉口	车辆驶入数目	车辆驶出数目
A	x_1	$40+x_3+x_4$
B	200	x_1+x_2
C	x_2+x_3	$100+x_5$
D	x_4+x_5	60

并且网络中的总流入量 200 等于总流出量 40+60+100.

由流量在每个节点是平衡的，可以得到方程组$\begin{cases} x_1-x_3-x_4=40 \\ x_1+x_2=200 \\ x_2+x_3-x_5=100 \\ x_4+x_5=60 \end{cases}$

利用线性方程组解的求解方法将系数矩阵A化为简化的行阶梯形矩阵B，再利用线性方程组解的结构定理写出通解。

将方程组写成矩阵形式：$AX=b$

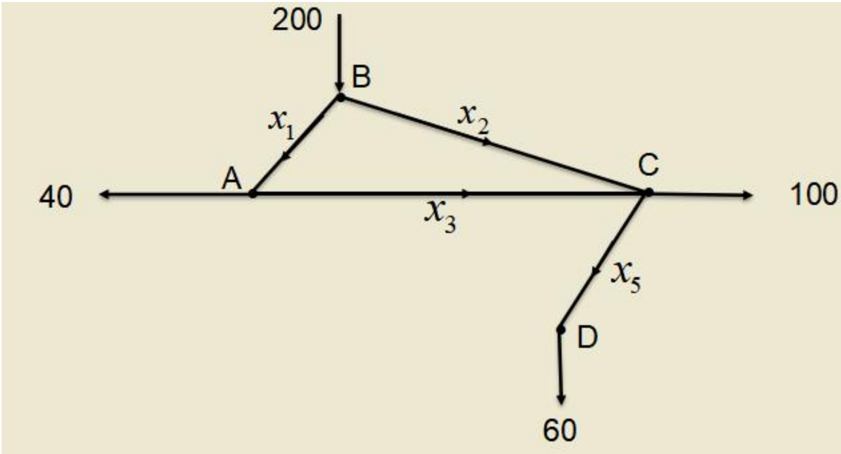
对方程组的增广矩阵 $(A \vdots b)$ 作初等行变换，化为简化行阶梯形矩阵B：

$$A=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 40 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 60 \end{array}\right) \longrightarrow B=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

得到该网络的车流量$\begin{cases} x_1=100+x_3-x_5 \\ x_2=100-x_3+x_5 \\ x_4=60-x_5 \end{cases}$，其中 x_3、x_5 为自由未知量。

（2）当支路 x_4 的道路封闭时，只有 A、D 节点的流量发生改变，由各

节点处的流量是平衡的，得到新的方程组并求解。



$$\begin{cases} x_1 = 40 + x_3 \\ x_1 + x_2 = 200 \\ x_2 + x_3 = 100 + x_5 \\ x_5 = 60 \end{cases}$$，将未知量重排后得：$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 40 \\ x_1 + x_2 = 200 \\ x_2 + x_3 - x_5 = 100 \\ x_5 = 60 \end{cases}$$

得到该交通流量的通解为：$$\begin{cases} x_1 = 40 + x_3 \\ x_2 = 160 - x_3 \\ x_5 = 60 \end{cases}$$

（3）思考并讨论出现某些特殊情况时，网络的交通流量以及某支路的流量。

当支路 x_4 的流量等于 0 时，在（1）的通解$\begin{cases} x_1 = 100 + x_3 - x_5 \\ x_2 = 100 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 60 - x_5 \end{cases}$中，由 $x_4 = 0$

可得$\begin{cases} x_1 = 40 + x_3 \\ x_2 = 160 - x_3 \\ x_5 = 60 \end{cases}$，由于网络中的道路是单行线，因此变量必须是非负数，

由 $x_1 = 40 + x_3$，而 $x_3 \geq 0$，可知 $x_4 \geq 40$，即 x_4 的最小值为 40。

6. 启发引导同学们提出问题、发现问题：

网络中出现负流量如何解释，在实际问题中找寻应用线性方程组的实例。

注：网络分支中的负流量对应模型中所示方向相反的流量。

7. 小结：

引导同学们体会学习线性代数的乐趣，感受线性代数的魅力和威力，并希望由此产生更大的动力和热情学好这门课程，将来更好地发挥该课程在国家发展建设中的作用。

向量组的极大无关组与“大国家队模式”

一、课程教学目标

n 维向量是线性代数中最简单的数组，既可以看成是矩阵的特殊情形，又可以看成是解析几何中二维和三维向量概念的推广。本教学案例主要内容包括向量组的极大无关组，向量组的秩等概念，通过本案例的教学，使学生达到如下目标：

知识目标：理解向量组的极大无关组与向量组的秩等概念，知道矩阵的秩与其行（列）向量组的秩之间的关系，掌握求向量组的极大无关组的方法。

能力目标：训练已知条件的充分挖掘，内在关系的发现和利用，逻辑推理的能力。

素质目标：通过发现规律进行抽象归纳，将问题化繁为简，从“形变质不变”看待事物变化，提高辩证思维能力和应用能力。

二、课程育人目标

围绕“大国家队模式”改革展开教学，将“组队上场比赛的小组队”对应于“向量组的极大无关组”，讨论班级干部班委成员对于班级凝聚力，团结协作力的影响。通过“大国家队模式组队比赛”案例，激发学生努力学习，增加自身核心竞争力，成为更好的自己。

三、育人案例设计

教学内容 （简述，不超过50字）	思政要素切入点 （100字左右）	育人目标 （100字左右）
第4章 第3节向量组	围绕“大国家队模式”改革展开教学，将“组队上场比	通过“组队比赛”案例，激发学生

的极大无关组与秩	赛的小组队”对应于“向量组的极大无关组”，讨论班级干部班委成员对于班级凝聚力，团结协作力的影响。	努力学习，增加自身核心竞争力，成为更好的自己。

四、实施过程

1. 开场白。

本次课程讲授的章节标题（第 4 章第 3 节向量组的秩），主要内容（包括向量组的极大无关组与向量组的秩），并强调所需的主要相关知识（向量组的线性相关性），以 PPT 形式呈现。

2. 案例引入 1---电影《夺冠》。

借助电影《夺冠》海报引起学生的好奇心并思考这节课的主要内容与电影的关系，围绕女排主教练郎平所大力推行的“大国家队模式”改革，组织学生讨论并思考，埋下伏笔，为课中展开教学内容奠定基础。

将核心竞争力映射到线性无关，引导学生努力学习增强技能，提升自身竞争力。将“组队上场比赛的小组队”对应于“向量组的极大无关组”，讨论班级干部班委成员对于班级凝聚力，团结协作力的影响。

3. 案例引入 2---线性方程组的保留方程组。

给定一个线性方程组，方程个数和未知量个数均为 3.通过分析发现其中第三个方程是多余的，可以只保留前两个方程，这样求解原方程组时只要求解保留方程组即可。那么在一个线性方程组中，究竟哪些方程是多余的，哪些方程可以用其余方程线性表示？为了借助向量工具更深入研究上述问题，需要研究极大无关组等概念。

4. 抽象提取数学定义，发现规律本质，给出等价定义。

抽取两个案例在数学上的抽象共性，给出极大无关组的定义，并举例进一步说明向量组的极大无关组不唯一，正如挑选上场比赛队员的组队方式不唯一。进一步研究极大无关组的性质：为何要选取极大无关组？极大无关组可能不唯一，内在有何联系？从案例和例题中体会极大无关组的特征，抓住本质，变中不变的是向量组的秩。

5. 总结求解方法，举例演示。

借助矩阵工具，利用三秩合一定理，利用初等行变换，给出求向量组的极大无关组和向量组的秩的方法。

6. 思考讨论，归纳总结，进行讨论。

组织学生围绕“大国家队模式”改革展开小组讨论，将“组队上场比赛的小组队”对应于“向量组的极大无关组”，讨论班级干部班委成员对于班级凝聚力，团结协作力的影响。通过“大国家队模式组队比赛”案例，激发学生努力学习，增加自身核心竞争力，成为更好的自己。

7. 布置课后探索题。

让学生自己找相关应用案例，培养学生将理论知识应用于实际，增强分析问题和解决问题的能力。

正交矩阵与国旗

一、 课程教学目标

正交矩阵是一类具有特殊性质的矩阵，是具有代数和几何双重性质的矩阵，在实际生活中有着广泛的应用。通过本案例的教学，主要想达到如下三个目标：

知识目标：理解正交矩阵在向量中的应用，学会从数学建模的思想考虑问题，希望带领学生从代数和几何两个不同的视角理解向量的各种运算，提高学生多角度看同一问题的能力。

能力目标：掌握判定正交矩阵的常用方法，结合向量正交化的工具，能够在逻辑推理能力、抽象思维能力以及发现问题和使用数学软件的能力方面受到一定的训练。

素质目标：化抽象为具体，通过具体案例掌握核心数学知识，普及历史知识，发扬革命精神，引领新时代大学生树立正确价值观，人生观和世界观，于润物细无声中培养爱国情怀。

二、课程育人目标

课程从五星红旗出发，利用国旗的红色情怀，引导学生缅怀先烈的奋斗历程，用国旗的故事激励新时代的大学生要牢记历史，正值建党百年，应该树立伟大理想，报效国家，不负青春与韶华。

三、育人案例设计

教学内容 （简述，不超过50字）	思政要素切入点 （100字左右）	育人目标 （100字左右）
第四章 第5节 向量的内积与正交向量组	从国庆节前后，在北京的街头和小区看到的作为切入点，引出红旗，普及红旗的含义：红色象征革命；五角星象征中国共产党领导下的人民大团结；四颗小五角星各有一尖正对着大星的中心点，表示围绕着一个中心而团结。	国旗特有的的红色元素，便于引导学生缅怀先烈，正值多事之秋，激励新时代的大学生要牢记历史，奋发图强，报效国家，不负青春与韶华。

四、实施过程

学情分析：本课程的设计放在正交矩阵的这一小节，前面的章节已经介绍过向量的线性运算-加法和数乘，而且会结合图形将运算表示出来，这也体现了数学教学中代数与几何的关系，抽象与具体的联系。作为正交矩阵非常特殊的例子，在平面上有一种具体的表现形式就是旋转变换（另外一种是反射变换），将向量的旋转变换运用到五角星中。

1. 引例与问题导入

先以国歌为背景音乐引出课程的主角-国旗，带领大家回忆国旗的标准以及意义，用设问的方式问如何画出美丽的国旗？

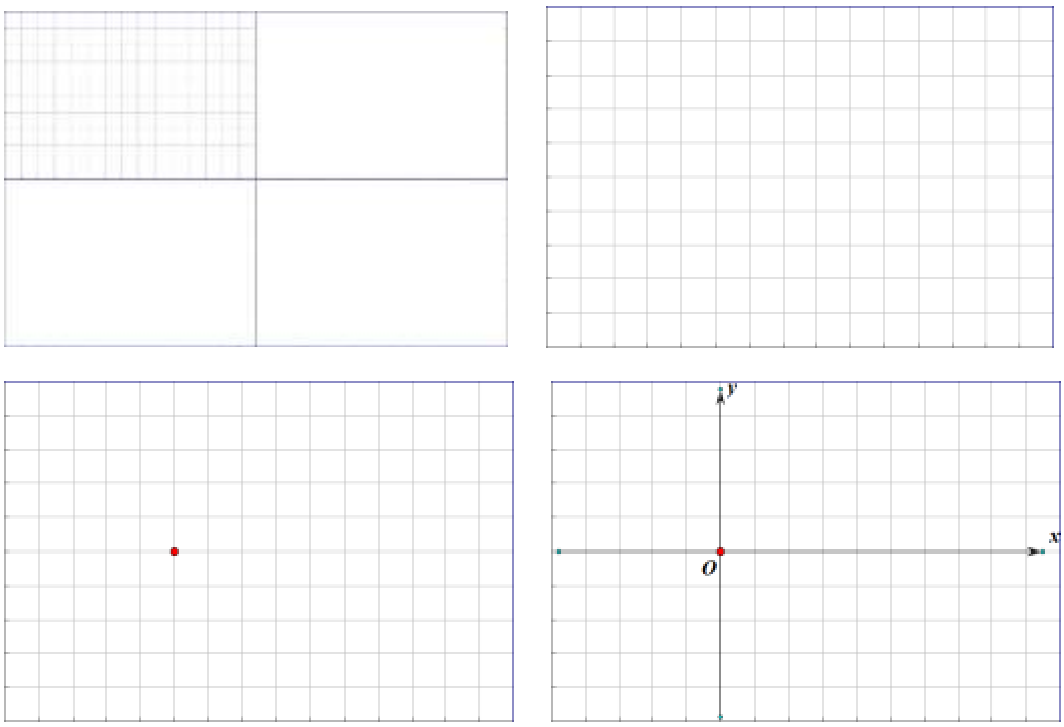
2. 思政要点

普及国旗的知识以及上面五角星的象征意义，作为新时代的大学生，这样能够更好的体会新中国 70 年来的繁荣富强，是因为革命先辈的浴血奋战才有了今天的美好生活。

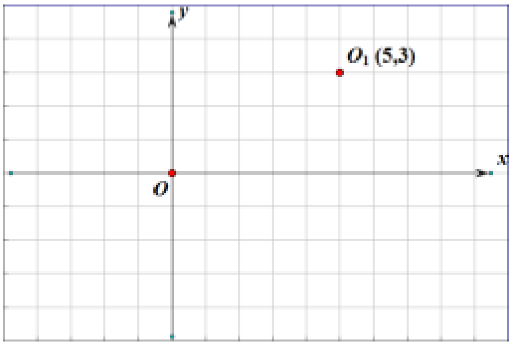
3. 简化和提炼问题

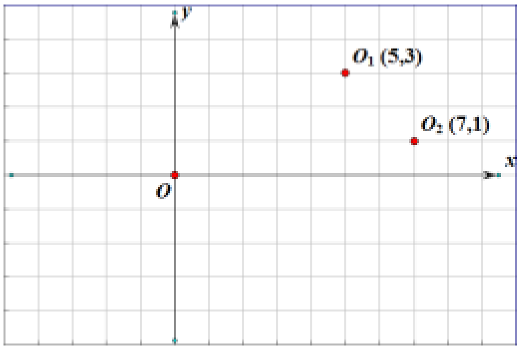
结合向量的方法，先以白色为底，再上色，主要分为以下步骤：

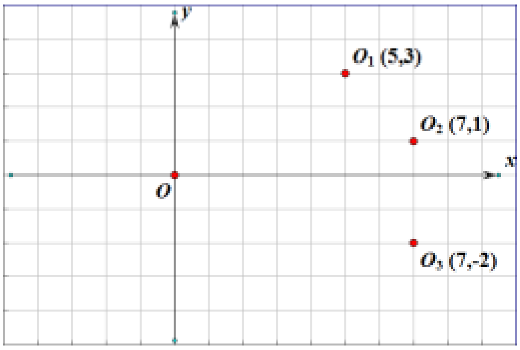
（1）根据规定，确定大小五角星的位置，取旗面左上角 1/4 的地方，将其按长 15 等分，宽 10 等分，大五角星的中心点在旗面上五下五，左五右十之处，以中心点为原点建立直角坐标系

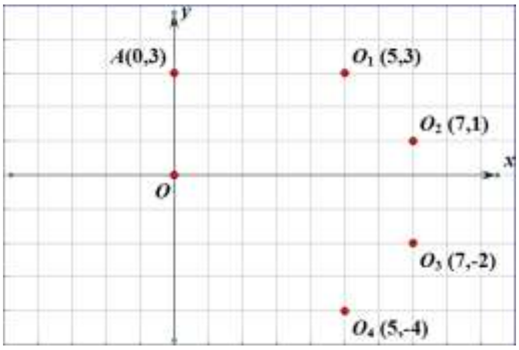


（2）每个小五角星都有自己特定的位置，比如第一点在上二下八、左十右五之处，对应坐标为 $O_1(5,3)$，依次得点 $O_2(7,1)$， $O_3(7,-2)$ 和。

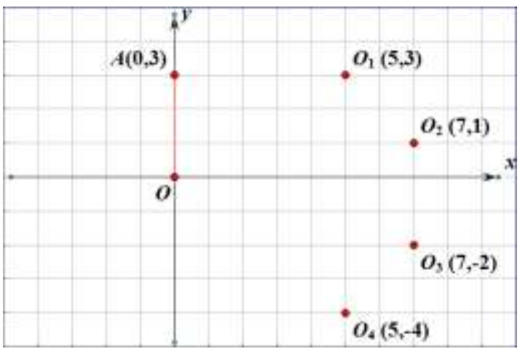


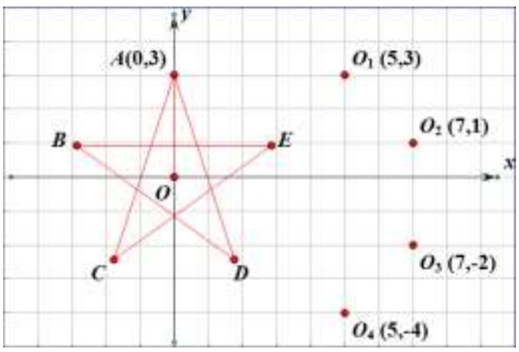


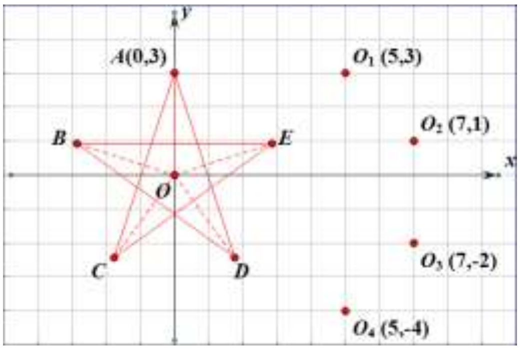




（3）按规定，大五角星中心点的正上方 3 个单位处有一个顶点，记为 A，坐标为(0,3)，得向量 $\overrightarrow{OA}$。**先假设大五角星已经做出来了**，设其他顶点分别为 B,C,D,E, 如何通过大的五角星做出小的五角星呢？

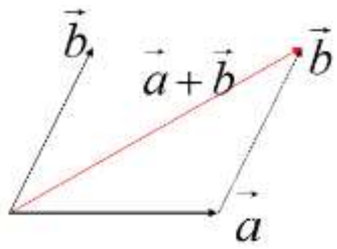


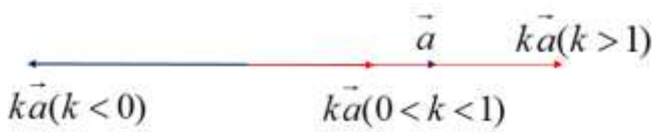




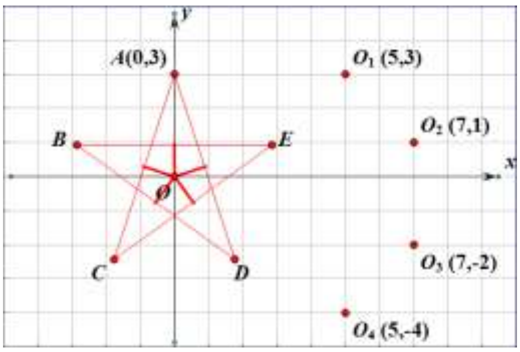
4．复习向量的线性运算和几何意义

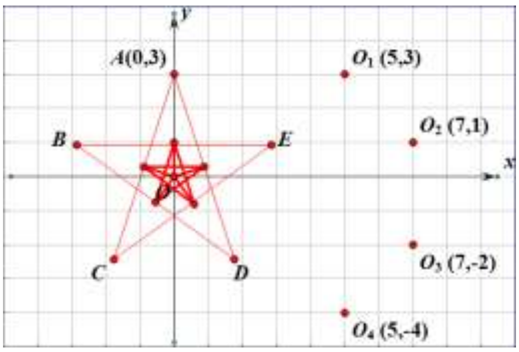
(4) 复习向量的两种基本的线性运算，加法和数乘，特别是几何意义，向量的加法就是向量的平移，向量的数乘就是向量的伸缩。

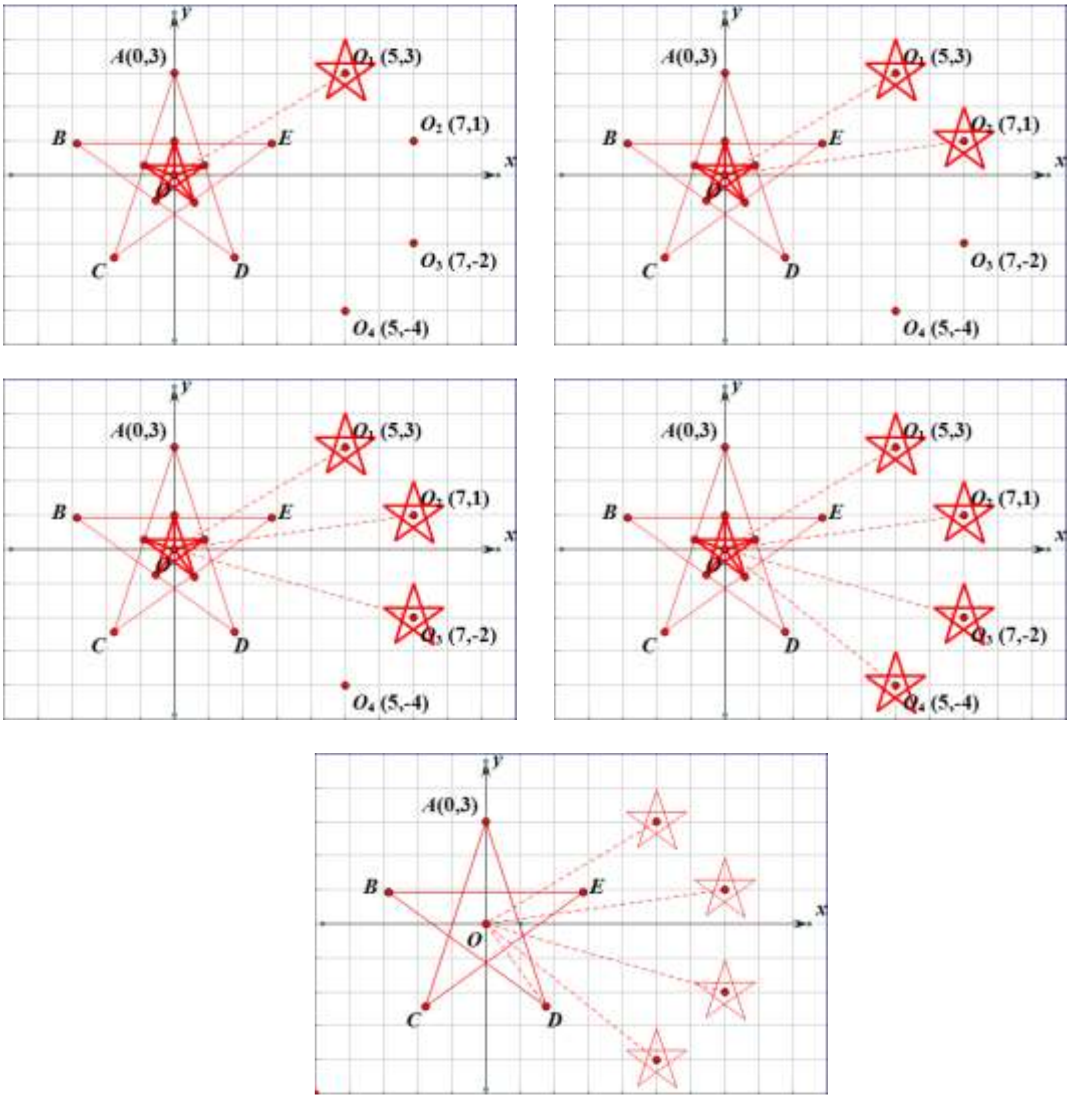




（5）按规定，用向量的数乘将大五角星的坐标放缩 1/3 得到小五角星，然后再用向量的加法分别平移到 4 个小五角星的中心位置。具体为将向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}$ 分别乘以 1/3 就可以确定中心点在原点的小五角的 5 个顶点，相连后得到小五角星。再将小五角星按向量 $\overrightarrow{OO_1},\overrightarrow{OO_2},\overrightarrow{OO_3},\overrightarrow{OO_4}$ 平移，这样就完全在旗面上确定了 5 个五角星了。

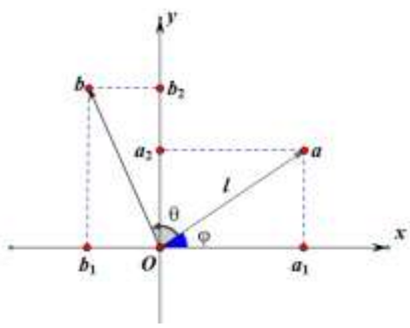






5. 引入定义

（6）小五角星的尖没有指到大的中心点，如何改变？为了解决遗留的两个问题，引入向量的旋转，先考虑平面向量逆时针旋转 θ 后向量坐标间的关系，已知向量 $\vec{a}=(a_1,a_2)^T$，绕原点逆时针旋转角度 θ 后得到向量 $\vec{b}=(b_1,b_2)^T$ 满足



$$\begin{cases} b_1=a_1\cos\theta-a_2\sin\theta \\ b_2=a_1\sin\theta+a_2\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

特别记 $R_\theta=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，称之为平面向量旋转矩阵，其最本质的性质是

$$R_\theta R_\theta^T = R_\theta^T R_\theta = I_2 \text{。}$$

引入本节课的重要内容-正交矩阵。

定义：若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $AA^T = A^T A = I_n$，称矩阵 A 为正交矩阵。

6. 解决问题

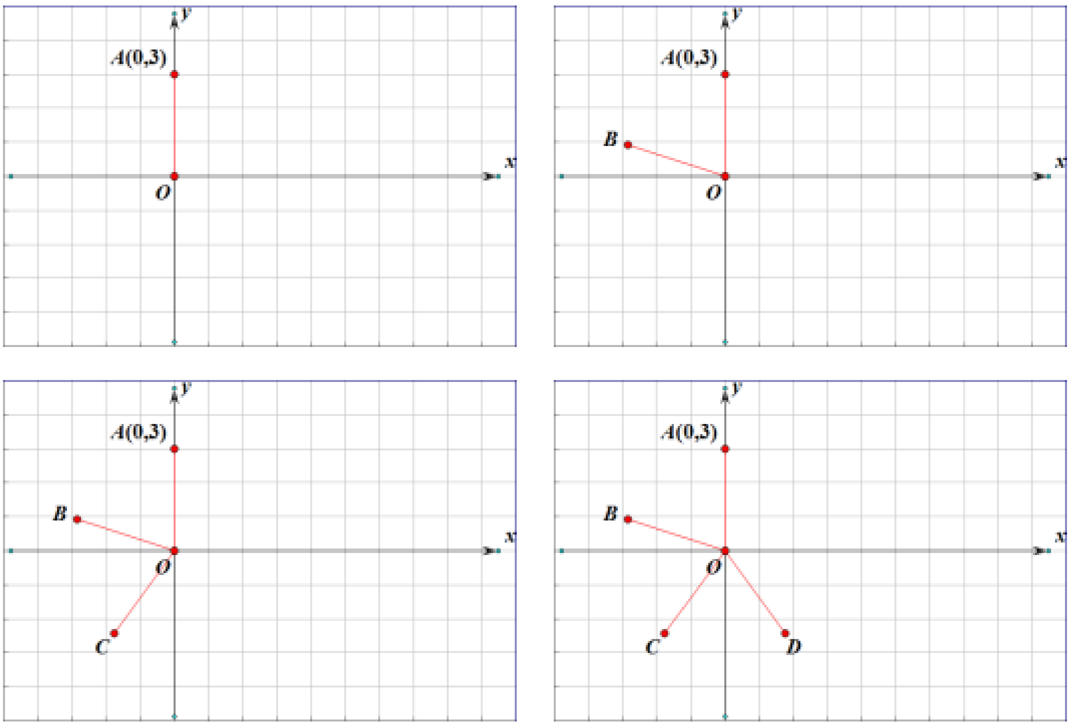
（7）确定大五角星的顶点位置，已知顶点 A 对应向量 $\overrightarrow{OA}=(0,3)$，取旋转矩阵 $R=\begin{pmatrix}\cos 72^\circ & -\sin 72^\circ \\ \sin 72^\circ & \cos 72^\circ\end{pmatrix}$，将向量 $\overrightarrow{OA}$ 依次旋转一次得到向量

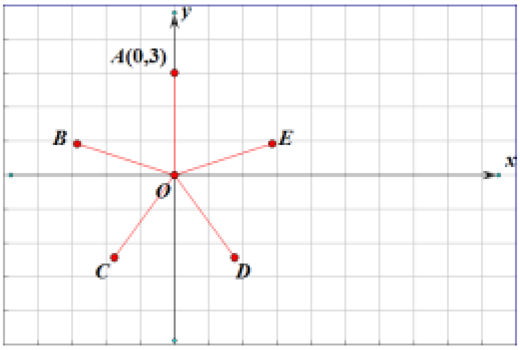
$$\overrightarrow{OB}=R\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}\cos 72^\circ & -\sin 72^\circ \\ \sin 72^\circ & \cos 72^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2.853\\0.927\end{pmatrix},$$

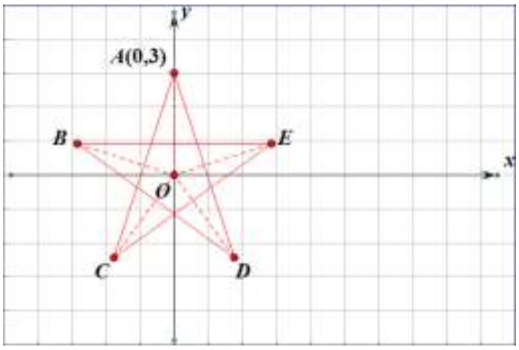
$$\overrightarrow{OC}=R^2\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}\cos 72^\circ & -\sin 72^\circ \\ \sin 72^\circ & \cos 72^\circ\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.763\\-2.427\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OD}=R^3\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}\cos 72^\circ & -\sin 72^\circ \\ \sin 72^\circ & \cos 72^\circ\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.763\\-2.427\end{pmatrix},$$

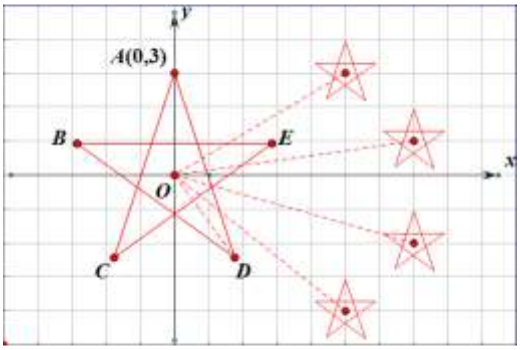
$$\overrightarrow{OE}=R^4\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}\cos 72^\circ & -\sin 72^\circ \\ \sin 72^\circ & \cos 72^\circ\end{pmatrix}^4\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.853\\0.927\end{pmatrix},$$ 连接后得大五角星。

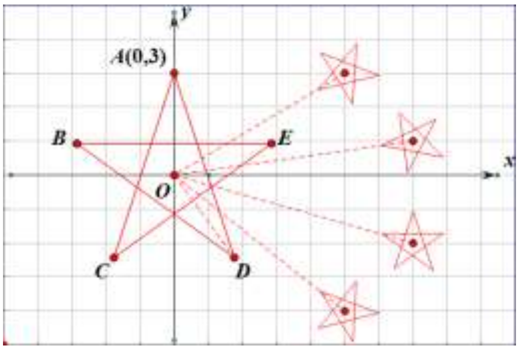






（8）调整小五角星的尖对准大的中心点，利用旋转矩阵，通过计算将 4 颗小星分别绕其中心点逆时针旋转 $50^{\circ},26^{\circ},2^{\circ},51^{\circ}$，就对准了大星的中心点了，象征围绕着一个中心而团结，最后再涂色就是一面标准的五星红旗了。





7. 教学反思

教学过程中一直渗透着提出问题，分析问题，解决问题和适当拓展的教学方法，做到课堂有收有放，鼓励大家集思广益，寓教于乐，用问答互动方式式，能够促使学生体验和反思，促进学生主动学习。

北斗导航中的定位问题与线性方程组

一、课程教学目标

矩阵消元法是求解线性方程组常用的方法，通过本案例的教学，主要想达到如下三个目标：

知识目标：了解一般线性方程组的基本概念及其矩阵表示，掌握初等行变换求解线性方程组的方法，掌握矩阵初等行变换的定义，学会使用初等行变换求解线性方程组和化简矩阵，理解计算矩阵初等行变换的算法步骤。

能力目标：思考消元法可行的理论依据，以及得到的阶梯型方程组（或矩阵）是否唯一，是否与变换过程有关，掌握常用数学软件求解线性方程组的命令。

素质目标：结合北斗导航的发展历程，培养学生树立远大理想，立志报效祖国的家国情怀，培养学生逻辑推理能力及抽象思维能力以及数学软件解决实际问题的能力。

二、课程育人目标

通过介绍古代数学的伟大成就，引导学生树立文化自信，结合北斗卫星曲折的发展过程，引导学生抓住祖国发展的机遇，志存高远，从自我做起，为中华民族的伟大复兴贡献力量。

三、育人案例设计

教学内容 （简述，不超过50字）	思政要素切入点 （100字左右）	育人目标 （100字左右）
第3章 3.2 线性方程	从四星定位问题展开，介绍北斗导航系统的发展和挫	抗击疫情，将物资及时送达，彰

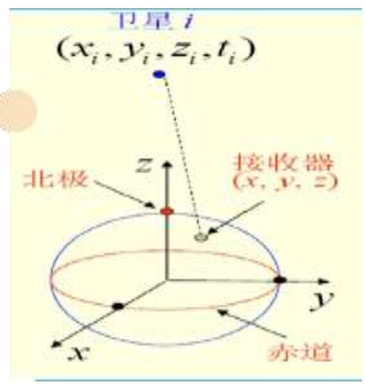
组的求解与初等行变换	折，引入线性方程组的求解问题，引用方程术的例子，树立文化自信，激烈莘莘学子，抓住当下的机遇，努力学习。	显北斗导航是国家安全和经济发展不可或缺的基础设施，是大国地位和综合国力的重要标志，是提高文化自信的重要支撑。

四、实施过程

1. 开场白

播放一段新闻：2020 年 7 月 31 日，中国向全世界郑重宣告，中国自主建设、独立运行的全球卫星导航系统已全面建成，中国北斗自此开启高质量服务全球、造福人类的崭新篇章。简要介绍我国自主发展导航系统的历史。

2. 引例



先以卫星定位为例子，引入具体问题，假设有 1，2，3，4 颗卫星，经过时间 t 接收器收到卫星的信号，用 c 表示光速，如何确定接收器的具体位置？根据距离，得到线性方程组

$(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2=c^2(t-t_i)^2, i=1,2,3,4$，整理后得

$2x_ix+2y_iy+2z_iz-2c^2t_it=x^2+y^2+z^2+x_i^2+y_i^2+z_i^2-c^2t^2-c^2t_i^2$，引入记号

$c_j = \frac{1}{2}\left(x_j{}^2 + y_j{}^2 + z_j{}^2 - x_4{}^2 - y_4{}^2 + z_4{}^2 - c^2 t_4{}^2 - c^2 t_j{}^2\right), j = 1,2,3$，令 i=1,2,3,4 得线性方程

组 $\begin{cases} (x_1 - x_4)x + (y_1 - y_4)y + (z_1 - z_4)z - c^2(t_1 - t_4)t = c_1 \\ (x_2 - x_4)x + (y_2 - y_4)y + (z_2 - z_4)z - c^2(t_2 - t_4)t = c_2 \\ (x_3 - x_4)x + (y_3 - y_4)y + (z_3 - z_4)z - c^2(t_3 - t_4)t = c_3 \\ 2x_4 x + 2y_4 y + 2z_4 z - 2c^2 t_4 t = x_i{}^2 + y_i{}^2 + z_i{}^2 x_4{}^2 + y_4{}^2 + z_4{}^2 - c^2 t_4{}^2 - c^2 t^2 \end{cases}$

当四颗卫星不在同一个平面上时，由前三个方程可以得(x, y, z)的线性方程

组 $\begin{cases} (x_1 - x_4)x + (y_1 - y_4)y + (z_1 - z_4)z = c^2(t_1 - t_4)t + c_1 \\ (x_2 - x_4)x + (y_2 - y_4)y + (z_2 - z_4)z = c^2(t_2 - t_4)t + c_2 \\ (x_3 - x_4)x + (y_3 - y_4)y + (z_3 - z_4)z = c^2(t_3 - t_4)t + c_3 \end{cases}$，

那么如何求解一般的线性方程组？

3. 思政要点

抗击疫情，分秒必争。北斗“交通”打通火线运输线，确保防疫物资及时送达；国庆阅兵，举世瞩目。北斗“标齐”大显身手，受阅方队、装备“米秒不差”，阅出了军威、国威；在世界之巅珠穆朗玛峰，北斗为中国攀登者完成高程测量提供主要数据；在惊涛骇浪的南海，中国渔民无论行驶到哪块海域都在中国北斗的俯瞰之中，…，这就是中国北斗，它是国家安全和经济社会发展不可或缺的信息基础设施，是大国地位和综合国力的重要标志。

4. 求解问题

再回到《九章算术》的例子，

方程：今有上禾三秉,中禾二秉,下禾一秉,实三十九斗；上禾二秉,中禾三秉,下禾一秉,实三十四斗；上禾一秉,中禾二秉,下禾三秉,实二十六斗；问上、中、下禾实一秉各几何?

具体解法如下，

术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗，於右方。中、左禾列如右方。

写出得到（竖直方向书写的）矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix}$。

以右行上禾遍乘中行而以直除。又乘其次，亦以直除。

消元后得到矩阵$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{bmatrix}$。

然以中行中禾不盡者遍乘左行而以直除。

继续消元后得到矩阵$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{bmatrix}$。

左方下禾不盡者，上為法，下為實。實即下禾之實。

去掉公因数得到矩阵$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 11 & 24 & 39 \end{bmatrix}$。

求中禾，以法乘中行下實，而除下禾之實。

对第二列继续消元得到矩阵$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 20 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 11 & 85 & 39 \end{bmatrix}$。

餘如中禾秉數而一，即中禾之實。

去掉公因数得到矩阵$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 11 & 17 & 39 \end{bmatrix}$。

求上禾亦以法乘右行下實，而除下禾、中禾之實。餘如上禾秉數而一，即上禾之實。

对第三列继续消元，去掉公因数得到矩阵$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 11 & 17 & 37 \end{bmatrix}$

實皆如法，各得一斗。

分别将系数化为 1，得到矩阵$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{11}{4} & \frac{17}{4} & \frac{37}{4} \end{bmatrix}$，这就是结果。

为了符合现代书写习惯，写成

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 4 & 8 & 39 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 36 & 99 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 4 & 11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 20 & 0 & 85 \\ 0 & 0 & 4 & 11 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 4 & 11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 111 \\ 0 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 4 & 11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 37 \\ 0 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 4 & 11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{37}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \end{bmatrix}.$$

上述过程就是消元法。

5. 初等变换的定义和结论

定义：(初等行变换)对矩阵施行下列三种运算称为矩阵的初等行变换

(1) 交换矩阵的两行的位置，

(2) 用一个非零数 k 去乘矩阵某一行的所有元素，

(3) 把某一行的倍数加到另一行对应的元素上去。

注记. 将上述矩阵初等行变换中的“行”换成“列”，则得到类似的初等列变换，这两种变换统称为矩阵的初等变换。显然初等变换都是可逆的。变换后的矩阵不相同，所以用 $\longrightarrow$ 表示。

结合前面讲过的行阶梯型矩阵和简化行阶梯型矩阵，重复使用初等行变换，我们可以证明

定理：任意 $m \times n$ 矩阵总可以经过有限次初等（简化）行变换化为阶梯型矩阵。

例题：化简以 $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 为增广矩阵的线性方程组为阶梯型和简化阶梯型。

解答：反复使用三种初等行变换，可得

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. 教学反思

引导学生从实际问题入手，通过所学知识，简化问题，要时刻利用建模的思想解决问题，达到学以致用的效果。

特征向量与优美的小波

矩阵，作为线性代数的重要工具，研究其特征值和特征向量有着重要的意义。矩阵 A 乘以 p 表示，对向量 p 进行一次转换（旋转或拉伸），而该转换的效果为常数 λ 乘以向量 p（即只进行拉伸）。通常求特征值和特征向量即为求出该矩阵能使哪些向量（特征向量）只发生拉伸，使其发生拉伸的程度如何（特征值大小）。这样做的意义在于，看清一个矩阵在那些方面能产生最大的效果，并根据所产生的每个特征向量（一般研究特征值最大的那几个）进行分类讨论与研究。小波变换在图像压缩、图像分解等应用中有着广泛的应用。特征向量与最美小波例体现了我们构建的线性代数“4 模块”课程思政资源中围绕大计算和应用案例展开的线代之妙：通过本案例的教学，使学生达到如下目标：

一、 课程教学目标

1. 知识目标：通过案例导引，让学生掌握特征值与特征向量的概念，掌握计算方阵特征值及其相应特征向量的方法；

2. 能力目标：通过学习，能够把实际问题量化，矩阵化，并通过数学软件解决实际问题，获取信息；

3. 素质目标：通过学习特征值、特征向量，培养学生逻辑思维能力、抽象思维及对事物的认知能力，培养学生分析和解决问题的能力，提高学生将基础知识用于实践的能力。

二、 课程育人目标

通过问题驱动案例、课堂互动、例题三个环节，令学生深刻领悟线性代数的美与秒，对抽象的理论知识应用有初步了解，培养学生应用能力和学习兴趣，培养用于创新的挑战精神。

三、 育人案例设计

教学内容 （简述，不超过 50 字）	思政要素切入点 （100 字左右）	育人目标 （100 字左右）
第 6 章 特征值与特征向量	通过小波图像压缩、图像分解的案例展示，让学生感悟数学的美与秒，在学习理论知识的同时，增强学习兴趣和对学科发展前沿的了解，培养学生用于挑战的创	通过问题驱动案例、课堂互动、例题三个环节，令学生深刻领悟线性代数的美与秒，对抽象的理论知

	新精神。	识应用有初步了解，培养学生应用能力和学习兴趣，培养用于创新的挑战精神。

四、 实施过程

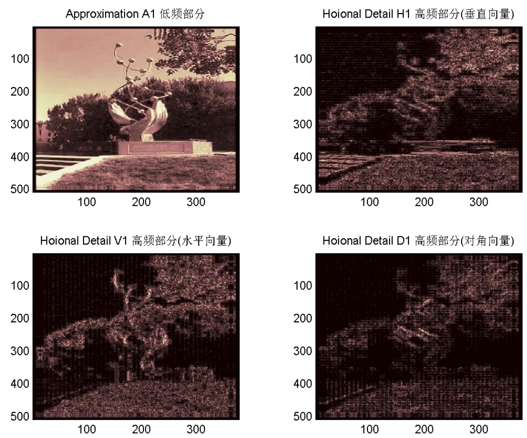
【学情分析】《线性代数》的授课对象是大一学生，这个阶段的学生还是延续了高中阶段的形象思维，对于线性代数过于抽象的知识体系并不能很好地接受。同时，他们思维活跃，但深度欠缺，具有对新知识的渴望与热情，也具有一定的提出问题，分析问题能力，但遇到复杂问题往往缺乏自信心，应用案例不易复杂，实际问题必须简化处理。

1. **开场**

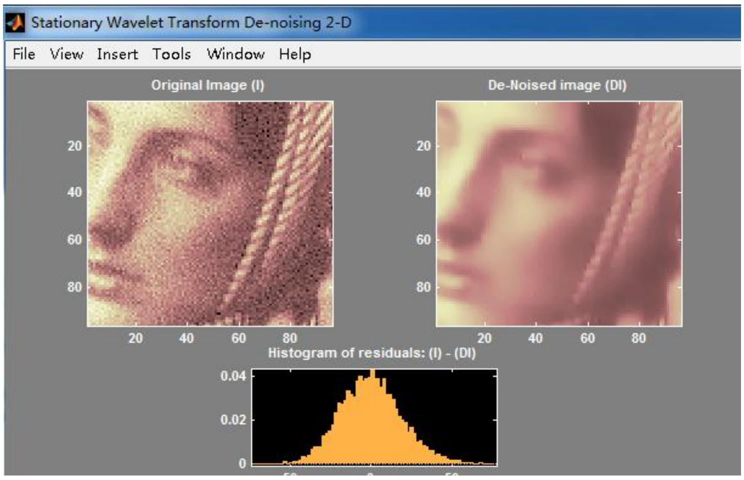
1. 图片导入---吸引学生兴趣—PPT 或者 MATLAB 环境下呈现：

同学们，下面的图像，大家看出来他们有什么联系和不同？启发同学思考。

（1）利用小波分解算法得到的图像分解（注：原始图像取材于北京化工大学的标志景致之 1—化大之光）



（2）例如：Matlab 环境下的图像去噪：



（2）小波分析简介：小波分析 (wavelet Analysis) 是 20 世纪 80 年代

中期发展起来的一门数学理论和方法，由法国科学家 Grossman 和 Morlet 在进行地震信号分析时提出的，随后迅速发展。 小波分析的出现被认为是傅立叶分析的突破性进展。小波变换的基本思想类似于Fourier变换，就是用信号在一簇基函数形成空间上的投影表征该信号。小波变化被誉为“数学显微镜”，它是调和分析发展史上里程碑式的进展。
小波分析的应用是与小波分析的理论研究紧密地结合在一起的。现在，它已经在科技信息产业领域取得了令人瞩目的成就。它的重要方面是图象和信号处理。现今，信号处理已经成为当代科学技术工作的重要部分，信号处理的目的就是：从数学地角度来看，信号与图象处理可以统一看作是信号处理（图象可以看作是二维信号），在小波分析地许多分析的许多应用中，都可以归结为信号处理问题。
(1)小波分析用于信号与图象压缩是小波分析应用的一个重要方面。它的特点是压缩比高，压缩速度快，压缩后能保持信号与图象的特征不变，且在传递中可以抗干扰。基于小波分析的压缩方法很多，比较成功的有小波包最好基方法，小波域纹理模型方法，小波变换零树压缩，小波变换向量压缩等。
(2)小波在信号分析中的应用也十分广泛。它可以用于边界的处理与滤波、时频分析、信噪分离与提取弱信号、求分形指数、信号的识别与诊断以及多尺度边缘检测等。
(3)在工程技术等方面的应用。包括计算机视觉、计算机图形学、曲线设计、湍流、远程宇宙的研究与生物医学方面。
下面我们简要介绍一下小波的几个应用：

1. 构造正交小波的统一框架：正交多分辨分析—-优美的多分辨结构

正交多分辨分析的定义

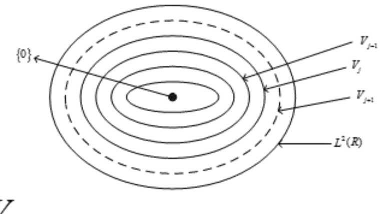
令 $V_j, j\in Z$ 是 $L^2(R)$ 中的一个函数子空间序列. 若下列条件成立:

(1) 单调性: $V_j \subset V_{j+1}$, $\forall j\in Z$

(2) 逼近性: $\bigcap_{j\in Z} V_j=\{0\}$, $\overline{\bigcup_{j\in Z} V_j}=L^2(R)$

(3) 伸缩性: $f(x)\in V_j \Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1}$

(4) 平移不变性: $f(x)\in V_j \Leftrightarrow f(x-k)\in V_j$



(5) 正交基基存在性 ： 存在函数 $\varphi\in V_0$, 使 $\{\varphi(x-k)\}_{k\in Z}$ 构成 V_0 的一个正交基.

则称 φ 为尺度函数. $\{V_j, j\in Z\}$ 称为由 φ 生成的正交多分辨分析.

2. 小波函数值的计算，归结为特征向量的计算问题，并给出算法：

$$\begin{cases} \varphi(x)=\sum_{k\in Z} h_k\varphi(2x-k) & \text{尺度方程} \\ \psi(x)=\sum_{k\in Z}(-1)^k h_{1-k}\varphi(2x-k) & \text{小波方程} \end{cases}$$

以尺度函数 $\varphi(x)$，支集为 $[0,\boldsymbol{L}]$ 为例，讨论 $\varphi(x)$ 的求值方法：

Step 1. 利用尺度方程，求 $\varphi(x)$ 在整数点处的值：

$$\begin{cases} \varphi(1)=\sum_{k=0}^{L} h_k\varphi(2-k)=h_0\varphi(4)+h_1\varphi(4)+h_2\varphi(4)+h_3\varphi(4) \\ \varphi(2)=\sum_{k=0}^{L} h_k\varphi(4-k)=h_0\varphi(4)+h_1\varphi(4)+h_2\varphi(4)+h_3\varphi(4) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(L-1)=\sum_{k=0}^{L} h_k\varphi(2L-2-k)=h_{L-1}\sum_{k=0}\varphi(L-1)+h_L\varphi(L-2) \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \vdots \\ \varphi(L-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & & \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & & \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & & & 0 & h_L & h_{L-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \vdots \\ \varphi(L-1) \end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \vdots \\ \varphi(L-1) \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & & \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & & \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & & & 0 & h_L & h_{L-1} \end{pmatrix}$

则

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{\alpha},$$

即求 $\boldsymbol{\alpha}$ 的问题，归结为计算矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的特征值为 1 的特征向量问题。

Step 2. 利用两尺度方程和 Step1 的结果，可求 $\varphi(\frac{1}{2}),\varphi(\frac{3}{2}),\cdots,\varphi(\frac{2L-1}{2})$ 的值。

Step 3. 逐次利用 $\varphi(\frac{m}{2^j})$ 的结果和两尺度方程，可计算

$\varphi(\frac{m}{2^{j+1}}) = \sum_k p_i \varphi(2 \cdot \frac{m}{2^{j+1}} - k) = \sum_i p_i \varphi(\frac{m}{2^j} - k),\ m = 1, 3, \cdots, (L \cdot 2^{j+1} - 1)$ ，从而可以画出尺度函数

的图形。

例如： 对应于 DB2 的尺度函数图形。

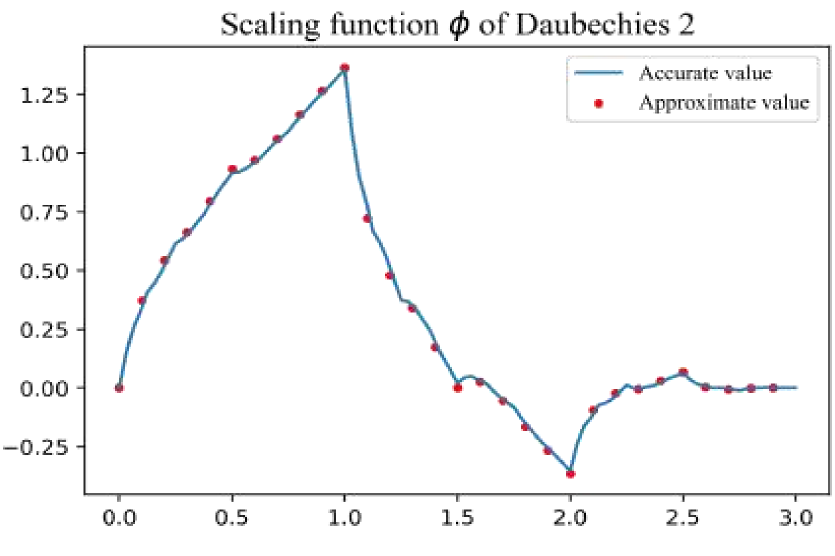
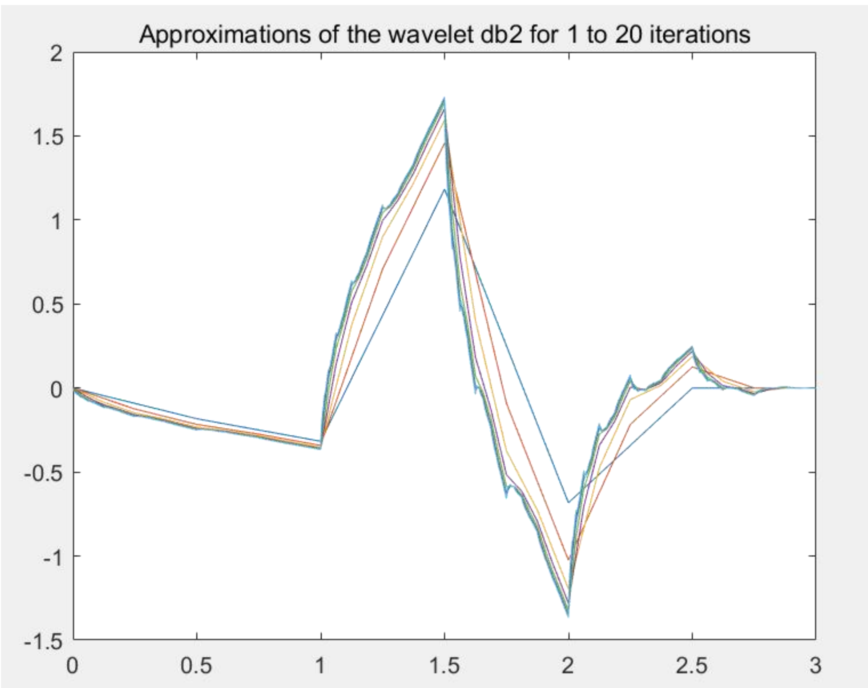


图 1: 尺度函数计算结果

再例如： 不同迭代次数下的小波逼近



2 定义引入：

定义 6.1 （特征值和特征向量）设 A 是 n 阶方阵，如果存在数

和非零列向量 p ，使得关系式

$\boldsymbol{Ap}=\lambda\boldsymbol{p}$ （6.1）成立，则称数λ是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**（elgenvalues），非零列向量 $\boldsymbol{p}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值λ的**特征向量**（elgenvectors）.

这里应当注意，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是方阵. 在本章中，如果不特别指出，所讨论 的矩阵均为方阵. 显然，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于一个特征值λ的特征向量不惟 一.

【例 6.1】 设 $\boldsymbol{p}=(1,1,-1)^T$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，

求 a,b 的值以及与 $\boldsymbol{p}$ 对应的特征值 λ.

【解】 由 $\boldsymbol{Ap}=\lambda\boldsymbol{p}$，可得 $\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

于是 $\begin{pmatrix}-1\\5+a-3\\-1+b+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\-\lambda\end{pmatrix}$，解之得 $\begin{cases}a=-3,\\b=0,\\\lambda=-1.\end{cases}$

【例 6.2】设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_n$ 的特征值，如何寻求它的所有特征向量？

【解】因为

$$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X} \Leftrightarrow \left(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}=0,$$

所以 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值当且仅当齐次线性方程组 $\left(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}=0$ 有非零解，而此方程组有非零解的充要条件是它的系数行列式等于零，即

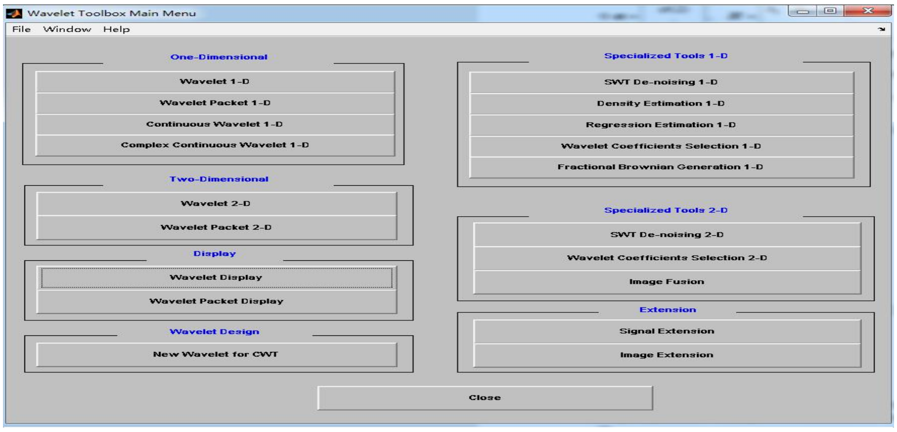
$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

因此，方程组 $\left(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}=0$ 的非零解就是属于特征值 λ 的所有特征向量.

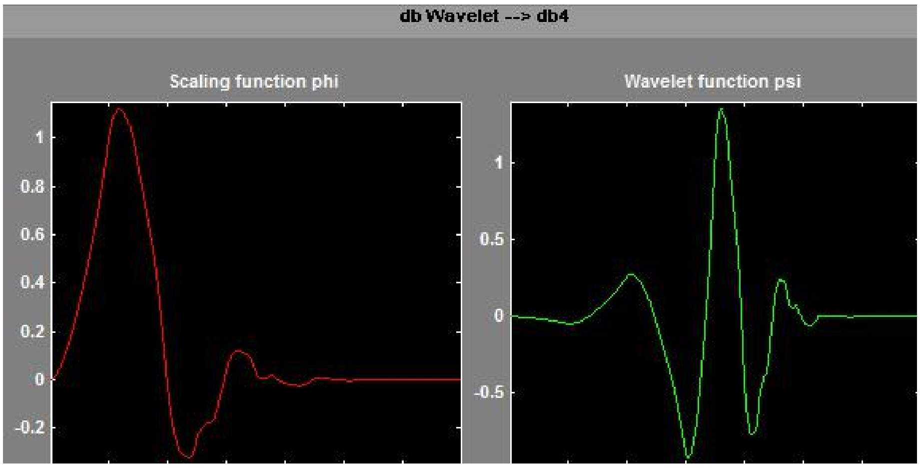
3. 课外拓展：

1. 你能根据小波方程写出小波函数值及其图形的算法吗？

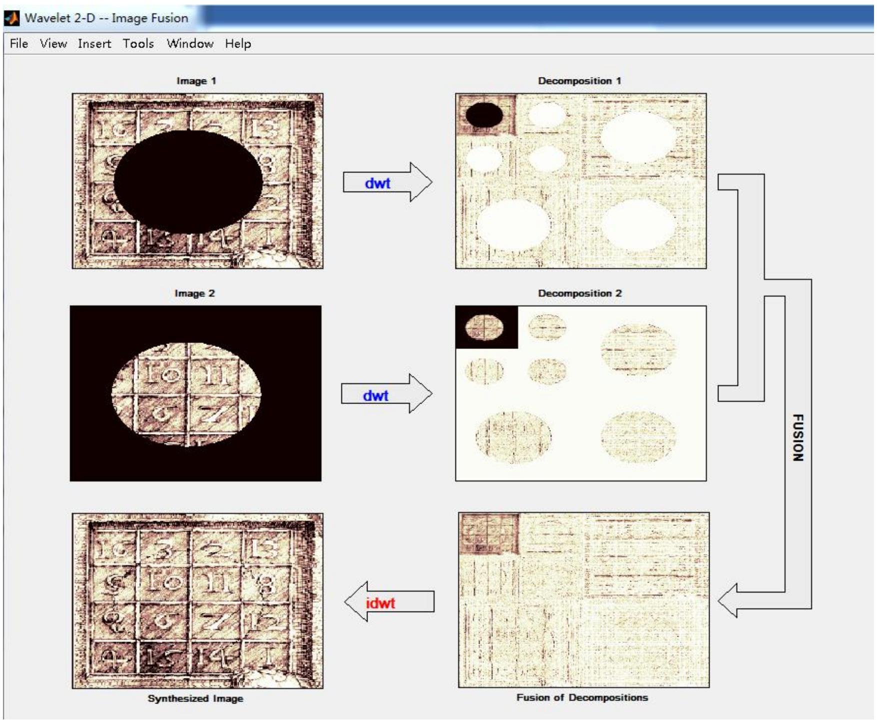
2. 感兴趣的同学，可以进入 MATLAB 工具箱，在窗口输入 wavemenu，然后回车，出现如下界面，熟悉小波族及其在信号或图像处理中的直观应用。



例如：Matlab 环境下生成的 Db4 小波的图形



再例如：Matlab 环境下利用小波的图像融合



实对称矩阵的正交对角化

一、课程教学目标

矩阵的对角化是线性代数课程的重要内容之一，针对本科生教学，在考虑学生知识储备和

理解力的基础上，依据学以致用的思想，利用特征值、特征向量及实对称矩阵对角化的理论知

识，给出葡萄酒分类的具体策略，旨在加深学生对矩阵特征值和特征向量及对角化理论的理解。

通过本案例的教学，使得学生达到如下三个目标：

（1）**知识目标：**掌握实对称矩阵对角化的判定，熟悉矩阵对角化的步骤。

（2）**能力目标：**培养学生的逻辑推理能力、抽象思维能力及利用数学知识解决问题的能力。

（3）**素质目标：**启发学生对于抽象数学学习的兴趣，借助中国葡萄酒文化故事，点燃当代

大学生的家国情怀和民族自豪感，培养具有社会担当和文化传承使命感的接班人。

二、课程育人目标

在葡萄酒风靡世界的今天，国人多认为葡萄酒是外来文化，因而葡萄酒长期被列入“洋酒”

之列。实际上，最原始的“酒”是野生浆果经过附在其表皮上的野生酵母自然发酵而成的果酒，

称之为“猿酒”，意思是这样的酒是由我们的祖先发现并“造”出来的。而中国是世界人类和

葡萄的起源中心之一，故葡萄酒应为“古而有之”，葡萄酒应是中国“土酒”，而不是“洋酒”。

本案例通过讲述我国的葡萄酒文化，阐述了从汉武帝时期-魏晋南北朝时期-唐朝我国葡萄

酒文化的辉煌历史，抛出不同品种的葡萄酒该如何分类的问题，从而将问题聚焦在实对称矩阵的正交对角化上。这样不仅彰显了数学的无限应用魅力，激发了学生利用数学知识解决实际问题的欲望，开阔了学生的学术视野，同时潜移默化地培养了学生的家国情怀和民族自豪感。

三、育人案例设计

教学内容（简述，不超过 50 字）	思政要素切入点（100 字左右）	育人目标（100 字左右）
第六章 6.3 实对称矩阵的对角化	通过讲述我国的葡萄酒文化，阐述了从汉武帝时期-魏晋南北朝时期-唐朝我国葡萄酒文化的辉煌历史，抛出不同品种的葡萄酒该如何分类的问题，从而将问题聚焦在实对称矩阵的正交对角化上。这样不仅彰显了数学的无限应用魅力，激发了学生利用数学知识解决实际问	彰显数学的无限应用魅力，激发了学生利用数学知识解决实际问题的欲望，开阔了学生的学术视野，同时潜移默化地培养了学生的家国情怀和民族自豪感。

四、实施过程

1. 开场。

开场时主讲教师在铺有白色台布的桌子上展示 5 种葡萄酒，讲述我们葡萄酒文化的辉煌历史和感人故事，进而引出“如何进行葡萄酒分类”的问题。

接下来告知同学们，要解决该问题所需的理论知识（实对称矩阵正交对角化的判定定理），并引导学生回顾已学知识：

定理 6.2 属于不同特征值的特征向量线性无关。

定理 6.6 阶方阵可对角化的充分必要条件是它具有个线性无关的特征向量。

定理 6.9 实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量必正交。

2、实对称矩阵的对角化。

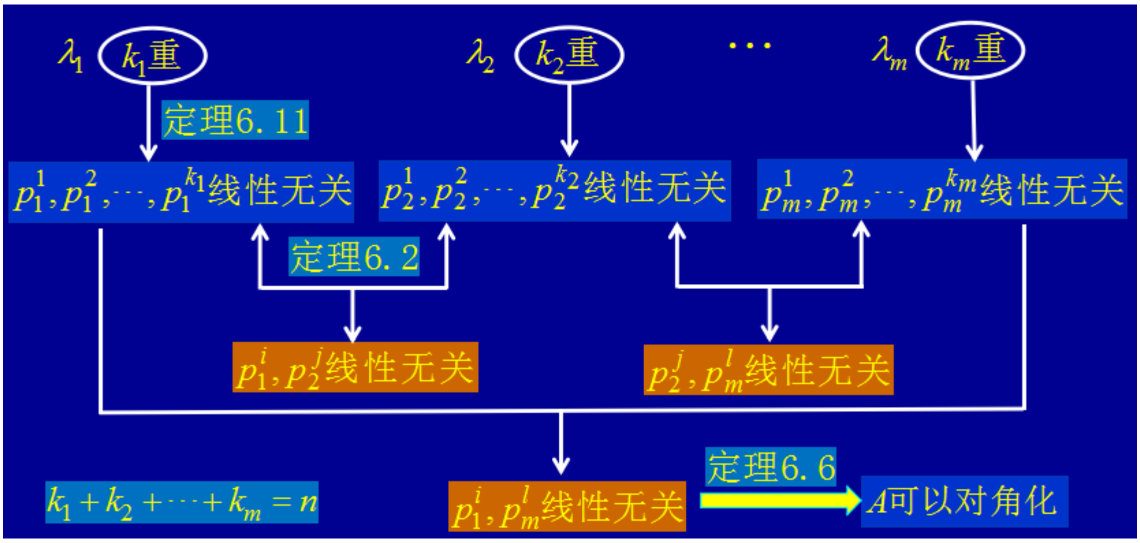
● 判定定理

定理 6.12 任意n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$必可对角化，且能与对角矩阵正交相似，即存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\varLambda}$$

其中$\boldsymbol{\varLambda}$是以$\boldsymbol{A}$的n个特征值为对角元素的对角矩阵。

证明： 首先说明实对称矩阵$\boldsymbol{A}$可对角化。



。

下面寻找满足条件的正交矩阵$\boldsymbol{Q}$。

获得正交单位向量组，以该向量组为列构造矩阵，相应矩阵即为所求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$。 容易验证$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$。证毕！

实对称矩阵对角化的步骤：

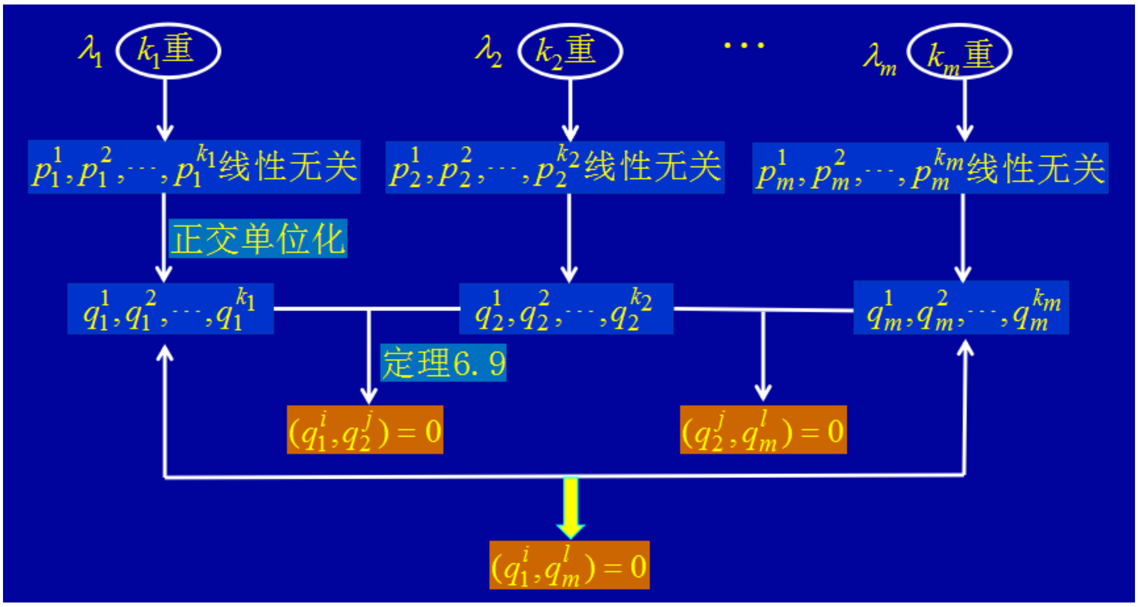
① 求出矩阵$\boldsymbol{A}$的全部特征值；

②求出属于每一个特征值的特征向量；

② 对特征向量施密特正交化、单位化；

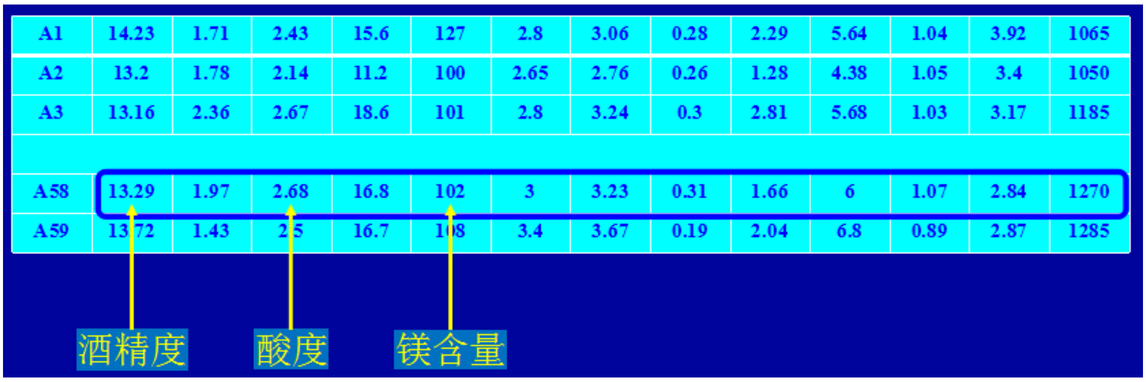
③ 以上述正交单位向量组为列构造矩阵$\boldsymbol{Q}$；

④ 矩阵$\boldsymbol{Q}$即为所求。



3、应用举例求解（葡萄酒分类）。

现有三种葡萄酒的178 个样本，每个样本含有13 个参数：



A1	14.23	1.71	2.43	15.6	127	2.8	3.06	0.28	2.29	5.64	1.04	3.92	1065
A2	13.2	1.78	2.14	11.2	100	2.65	2.76	0.26	1.28	4.38	1.05	3.4	1050
A3	13.16	2.36	2.67	18.6	101	2.8	3.24	0.3	2.81	5.68	1.03	3.17	1185
A58	13.29	1.97	2.68	16.8	102	3	3.23	0.31	1.66	6	1.07	2.84	1270
A59	13.72	1.43	2.5	16.7	108	3.4	3.67	0.19	2.04	6.8	0.89	2.87	1285

B1	12.37	0.94	1.36	10.6	88	1.98	0.57	0.28	0.42	1.95	1.05	1.82	520
B2	12.33	1.1	2.28	16	101	2.05	1.09	0.63	0.41	3.27	1.25	1.67	680
B3	12.64	1.36	2.02	16.8	100	2.02	1.41	0.52	0.62	5.75	0.98	1.59	450
B70	12.37	1.63	2.3	24.5	88	2.22	2.45	0.4	1.9	2.12	0.89	2.78	342
B71	12.04	4.3	2.38	22	80	2.1	1.75	0.42	1.35	2.6	0.79	2.57	580

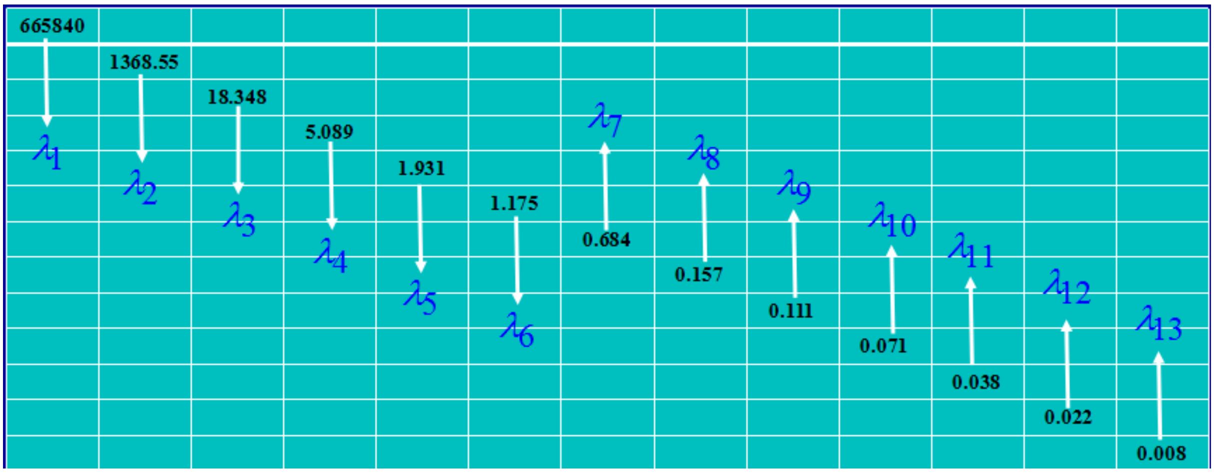
C1	12.86	1.35	2.32	18	122	1.51	1.25	0.21	0.94	4.1	0.76	1.29	630
C2	12.88	2.99	2.4	20	104	1.3	1.22	0.24	0.83	5.4	0.74	1.42	530
C3	12.81	2.31	2.4	24	98	1.15	1.09	0.27	0.83	5.7	0.66	1.36	560
C47	13.17	2.59	2.37	20	120	1.65	0.68	0.53	1.46	9.3	0.6	1.62	840
C48	14.13	4.1	2.74	24.5	96	205	0.76	0.56	1.35	9.2	0.61	1.6	560

问题：提取这三种葡萄酒的主要特征，能够快速甄别任意一新葡萄酒样本的所属问题。

解：根据三类葡萄酒的 178 个样本构造一 13*178 矩阵 R ，如下所示：

$$
\begin{bmatrix}
14.23 & 13.2 & \cdots & 13.72 & 12.37 & \cdots & 12.04 & 12.86 & \cdots & 14.13 \\
1.71 & 1.78 & \cdots & 1.43 & 0.94 & \cdots & 4.3 & 1.35 & \cdots & 4.1 \\
2.43 & 2.14 & \cdots & 2.5 & 1.36 & \cdots & 2.38 & 2.32 & \cdots & 2.74 \\
15.6 & 11.2 & \cdots & 16.7 & 10.6 & \cdots & 22 & 18 & \cdots & 24.5 \\
127 & 100 & \cdots & 108 & 88 & \cdots & 80 & 122 & \cdots & 96 \\
2.8 & 2.65 & \cdots & 3.4 & 1.98 & \cdots & 2.1 & 1.51 & \cdots & 2.05 \\
3.06 & 2.76 & \cdots & 3.67 & 0.57 & \cdots & 1.75 & 1.25 & \cdots & 0.76 \\
0.28 & 0.26 & \cdots & 0.19 & 0.28 & \cdots & 0.42 & 0.21 & \cdots & 0.56 \\
2.29 & 1.28 & \cdots & 2.04 & 0.42 & \cdots & 1.35 & 0.94 & \cdots & 1.35 \\
5.64 & 4.38 & \cdots & 6.8 & 1.95 & \cdots & 2.6 & 4.1 & \cdots & 9.2 \\
1.04 & 1.05 & \cdots & 0.89 & 1.05 & \cdots & 0.79 & 0.76 & \cdots & 0.61 \\
3.92 & 3.4 & \cdots & 2.87 & 1.82 & \cdots & 2.57 & 1.29 & \cdots & 1.6 \\
1065 & 1050 & \cdots & 1285 & 520 & \cdots & 580 & 630 & \cdots & 560
\end{bmatrix}
$$

作矩阵 $A=\frac{1}{178}RR^T$，不难发现 A 为实对称矩阵。 根据**定理** 6.12 它必可对角化，下面求出矩阵 A 的特征值并按从大到小的顺序排列：



与上述特征值对应的特征向量为：

0.009	0.076	0.065	0.051	0.114	0.073	0.422	0.255	0.799	0.060	0.266	0.114	0.015
0.011	0.074	0.015	0.013	0.012	0.042	0.625	0.747	0.044	0.170	0.112	0.028	0.003
0.178	0.188	0.946	0.072	0.070	0.150	0.016	0.001	0.040	0.007	0.065	0.022	0.003
0.001	0.003	0.056	0.001	0.004	0.002	0.023	0.108	0.280	0.182	0.906	0.228	0.021
0.002	0.000	0.003	0.000	0.002	0.005	0.007	0.003	0.048	0.007	0.258	0.958	0.116
0.029	0.008	0.003	0.851	0.247	0.165	0.266	0.217	0.241	0.096	0.018	0.015	0.003
0.076	0.013	0.119	0.514	0.376	0.263	0.464	0.390	0.315	0.197	0.012	0.008	0.003
0.960	0.162	0.216	0.047	0.035	0.017	0.036	0.029	0.004	0.011	0.019	0.004	0.000
0.021	0.032	0.125	0.002	0.038	0.913	0.297	0.187	0.146	0.062	0.006	0.012	0.002
0.004	0.058	0.001	0.017	0.103	0.055	0.106	0.332	0.062	0.913	0.152	0.034	0.006
0.197	0.961	0.147	0.024	0.030	0.006	0.061	0.034	0.074	0.071	0.010	0.008	0.001
0.041	0.003	0.023	0.011	0.875	0.195	0.201	0.139	0.299	0.210	0.029	0.020	0.003
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.002	0.005	0.119	0.993
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}

对特征向量 $P_1,P_2,\cdots,P_{13}$ 施以正交单位化，得向量组 $q_1,q_2,\cdots,q_{13}$，进而得到正交矩阵 $Q=[q_1,q_2,\cdots,q_{13}]$，使得 $Q^TAQ=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{13})$。

$$Q^TAQ=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & & & \\ & & \lambda_3 & & & & & & \\ & & & \lambda_4 & & & & & \\ & & & & \lambda_5 & & & & \\ & & & & & \lambda_6 & & & \\ & & & & & & \lambda_7 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_{12} \\ & & & & & & & & & \lambda_{13} \end{bmatrix}$$

观察发现矩阵 A 的后 7 个特征很小，因此可将它们对应的特征向量删除，使得剩余特征值对应的特征向量衍生出一个 6 维向量，此向量组即为反应葡萄酒品质的最重要的参数。这样便完成了对葡萄酒的分类。

【备注 1】本例采用 PCA 分析法，借助实对称可对角化理论对葡萄酒予以分类，其中涉及 PCA 降维环节，通过 Matlab 软件分析降维对分类的误差影响不大。

【备注 2】在构造对角矩阵和正交矩阵时，应特别注意排序的对应性。

4、课堂练习

试求正交矩阵 Q 使得下列矩阵可对角化

$$(1)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 4 & 0 & 3 & & \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 4 & \\ & 3 & 0 & 9 & 0 & 2 \\ & & 4 & 0 & 10 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

【提示】第一组同学考虑(1)；第二、三组同学考虑(2)，此题的求解借助 Matlab 软件将会更简单。

【教学总结】

● 刻画了任意实对称矩阵可对角化问题，并探究在葡萄酒分类问题中的应用。

● 利用定理 6.12 寻找恰当的正交矩阵，使得已知实对称矩阵相似于一对角矩阵。

● Matlab 软件在处理与矩阵相关问题时发挥重要的作用。

【课后作业】课本 215 页第四题、第六题及第七题。

化二次型为标准形

一、课程教学目标

二次型的系统研究是从18世纪开始的，它起源于解析几何中化二次曲线及二次曲面方程为标准方程问题。而二次曲面在曲面中占有重要地位，一方面，它包含许多常见的曲面，另一方面还常常用二次曲面来近似地表示比较复杂的曲面。通过二次型，可以很方便地讨论二次曲面分类以及各种不变量。在很多学科里，二次型都是主要研究对象，很多问题都可以转化为二次型。通过本案例的教学，使学生达到如下目标：

知识目标：掌握用正交变换法化二次型为标准形，了解如何用二次型化二次曲面方程为标准方程，以及如何通过二次型判断二次曲面的类型。

能力目标：在逻辑推理能力、抽象思维能力以及由特殊到一般解决问题的归纳推理能力方面得到提升。

素质目标：通过这部分内容的学习，使同学们感受到线性代数不仅是一门学习其他学科的必修课，同时也可以体会到数学与生活密不可分，数学在不断改变我们的生活，使我们的周围变得更加美好，潜移默化地激发学生学好这门课程的信心和决心，更加努力积极地投入到线性代数的学习中去，为将来参加祖国的建设奠定良好的学科基础，更好地为祖国建设出力。

二、课程育人目标

数学家华罗庚曾经说过：宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，日用之繁，无处不用数学。希望同学们能从这部分内容的学习中体会到这一点，发现各学科知识的融会贯通，体验数学应用的广泛性，感受

到数学学习的乐趣，感受到数学无处不在的美，看到数学的魅力，激发学习热情，端正学习态度，树立更加明确的学习目标和方向，学好这门课程，奠定好学科基础，成长为祖国建设的有用人才。

三、育人案例设计

教学内容 （简述，不超过 50 字）	思政要素切入点 （100 字左右）	育人目标 （100 字左右）
第七章 第二节	用正交变换化二次型为标准形的方法，将高等数学中的一般二次曲面方程 z=xy 化为标准方程，得出该曲面的类型为双曲抛物面（马鞍面），因为双曲抛物面屋盖利于排水、防止渗漏、减轻自重、节约材料、抗击压力、刚度较大、造型优美等优点，建筑学家们常常会把屋顶设计成双曲抛物面，比如中国国家体育场“鸟巢”、广州星海音乐厅、浙江杭州体育馆、薯片等。	数学家华罗庚曾经说过：宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，日用之繁，无处不用数学。希望同学们能从这部分内容的学习中体会到这一点，发现各学科知识的融会贯通，体验数学应用的广泛性，感受到数学学习的乐趣，感受到数学无处不在的美，看到数学的魅力，激发学习热情，端正学习态度，树立更加明确的学习目标和方向，学好这门课程，奠定好学科基础，成长为祖国建设的有用人才。

四、实施过程

教学过程：理论和实践相结合，以学生为中心，采用问题驱动式的教学理念，启发式的教学方法，利用智慧教学工具-雨课堂，引入日常生活中实例，设计和实施教学案例。

1. 问题导入-说明二次型理论的来源与引入的必要性

通过具体问题，自然而然地激发学生进一步学习的欲望：

二次型的系统研究是从 18 世纪开始的，它起源于解析几何中化二次曲线及二次曲面方程为标准方程问题。而二次曲面在曲面中占有重要地位，一方面，它包含许多常见的曲面，另一方面还常常用二次曲面来近似地表示比较复杂的曲面。

2. 正交变化法

采用启发式的教学方法，由实对称矩阵的对角化自然地过渡到如何将二次型标准化。

（1）标准形：只含平方项的二次型，即 $f=d_1{y_1}^2+d_2{y_2}^2+\cdots+d_n{y_n}^2$，称为二次型的标准形。

（2）知识回顾：实对称矩阵化为对角矩阵的理论与方法

（3）定理：任意 n 元实二次型 $f=X^TAX$，总可以通过正交变换 X=QY 化为标准形，即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX\ \underline{\underline{X=QY}}\ \lambda_1{y_1}^2+\lambda_2{y_2}^2+\cdots+\lambda_n{y_n}^2=Y^T\Lambda Y$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值，正交矩阵 Q 的列向量为 A 对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的正交单位特征向量。

注意：正交变换不改变图形的大小和形状。

设 X=QY 为正交变换，α、β 为 n 维实向量，做正交变换 X=QY，令 $X=Q\alpha$、$Y=Q\beta$，则

$$\langle X、Y\rangle=\langle Q\alpha、Q\beta\rangle=(Q\beta)^TQ\alpha=\beta^T(Q^TQ)\alpha=\langle\alpha、\beta\rangle$$

（4）步骤：

Ⅰ. 首先写出对应的二次型矩阵 A，并求其特征值和特征向量

Ⅱ. 将同一特征值的特征向量正交化、单位化

Ⅲ. 以Ⅱ中的标准正交向量组为列做正交矩阵 Q

Ⅳ. 做正交变换 X=QY，将二次型化为标准形：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX \underline{\underline{X=QY}} \lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2=Y^T\Lambda Y$$

(5)思政融入： 二次型标准化及如何判断二次曲面的类型举例，并自然地融入课程思政-体会数学与我们的生活密不可分、体会数学的美、数学的无处不在、数学给我们的生活带来的美好变化，潜移默化地激发同学们学好线性代数的信心和决心，奠定良好的学科基础，将来更好地投身到祖国的各项建设中去。

例1 设 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$，用正交变换将其化为标准形，并说明 $3x_1^2+2x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3=5$ 表示什么曲面。

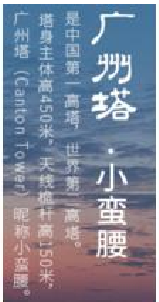
解： 二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&1\end{pmatrix} \quad |\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&0\\2&\lambda-2&2\\0&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda-2)(\lambda-1)=0$$

得A的特征值为：$\lambda_1=5,\lambda_2=2,\lambda_3=1$，求解对应的齐次线性方程组 $(\lambda E-A)X=0$，得对应的特征向量分别为：

$$\alpha_1=(2,-2,1)^T,\alpha_2=(2,1,2)^T,\alpha_3=(1,2,2)^T$$

单位化得：$\gamma_1=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})^T,\gamma_2=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})^T,\gamma_3=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T$



令$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ 作正交变换 $X=QY$，$Y=(y_1,y_2,y_3)^T$ 得标准形：

$$f(x_1,x_2,x_3)=5y_1^2+2y_2^2-y_3^2$$

$$3x_1^2+2x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3=5$$

$$\Big\downarrow X=QY$$

$$5y_1^2+2y_2^2-y_3^2=5$$

二次曲面的标准方程

$$y_1^2+\frac{y_2^2}{5/2}-\frac{y_3^2}{5}=1$$

单叶双曲面

引发学生： 感受生活中的数学，体会学数学、用数学，以及数学给我们的家园带来的美好变化。

例2 将二次曲面方程 $z=xy$ 化为标准方程，并指出该方程表示什么曲面。

解： $z=xy$ 即 $xy-z=0$ 这是一个三元二次方程

令 $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(\lambda E-A)X=0,$

该方程可用矩阵表示为 $X^TAX+b^TX=0$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda(\lambda+\frac{1}{2})(\lambda-\frac{1}{2})=0$$

得A的特征值为：

$\lambda_1=-\frac{1}{2},\lambda_2=\frac{1}{2},\lambda_3=0,$

A的特征值为：$\lambda_1=-\frac{1}{2},\lambda_2=\frac{1}{2},\lambda_3=0,$ 求解对应的齐次线性方程组

$(\lambda E-A)X=0,$ 得对应的特征向量分别为：

$\alpha_1=(1,-1,0)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(0,0,1)^T$ 单位化得：

$\gamma_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,\gamma_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,\gamma_3=(0,0,1)^T$

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 作正交变换 $X=QY$, $Y=(x_1,y_1,z_1)^T$

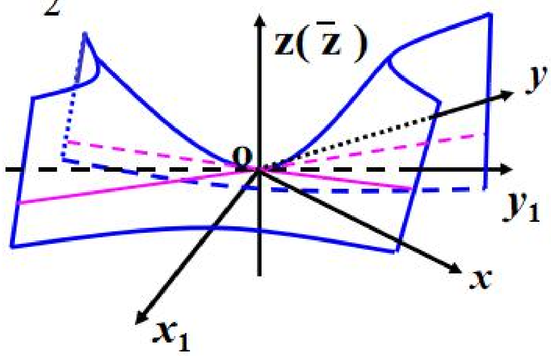
则有：$X^TAX=-\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}y_1^2$

$$b^T X = (0,0,-1)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = (0,0,-1)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = -z_1$$

$$X^T AX + b^T X = 0$$

二次曲面 $z=xy$ 化为标准方程为：$-\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}y_1^2 - z_1 = 0$

即 $z_1 = -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}y_1^2$ 双曲抛物面 马鞍面



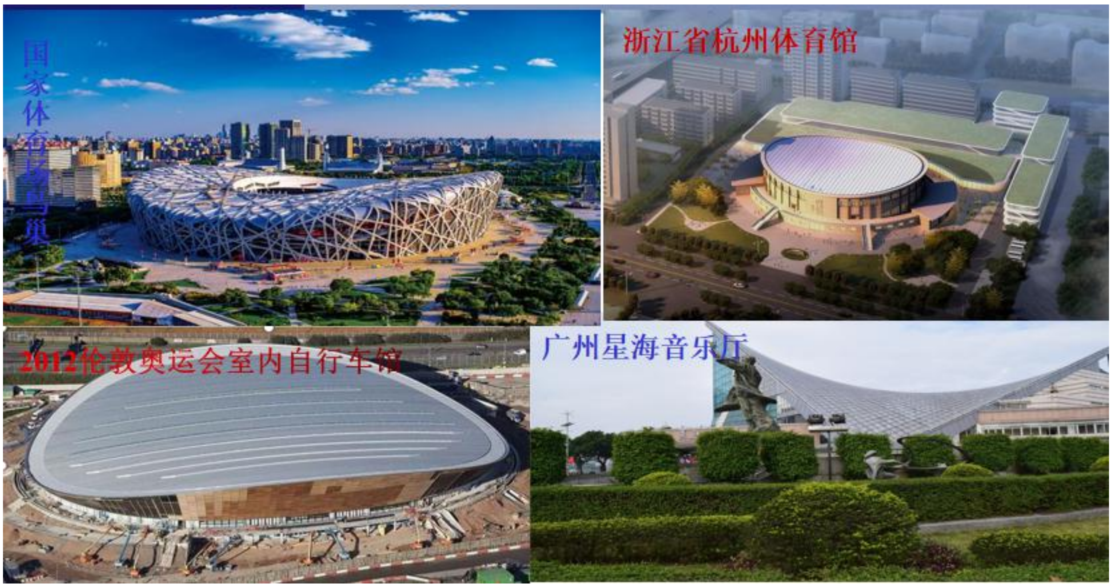
注：所作的正交变换实际上是一个旋转变换，z轴不动，从z轴的正方向往下看，x轴、y轴顺时针方向旋转 45°。

双曲抛物面的标准方程：$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$

引发学生思考：高等数学课程中只是指出 z=xy 表示的曲面是马鞍面，并未说明原因，通过具体推导，充分认识线性代数在其他课程学习中的价值。

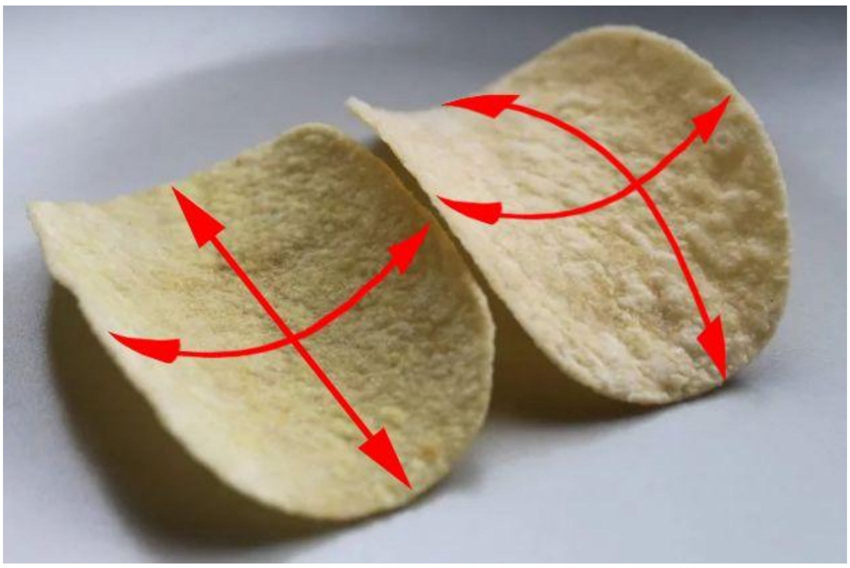
拓展：

双曲抛物面具有奇怪的力学特征，不仅能承受拉扯，还能承受推挤。为了让房屋更加能承载重量，抗击压力，建筑学家们常常会把屋顶设计成双曲抛物面，比如中国国家体育馆“鸟巢”、2012 伦敦奥运会的室内自行车馆等。



双曲抛物面的薯片，结构稳固，很难碎成一大块，更不会碎成对称的两瓣，而有些薯片一不小心就会碎掉。这其中最大的区别就是薯片里的数学原理。双曲抛物面是几何图形，它的特征就是无法形成一条应力线，也就是说小裂缝不会一下子变成一个大裂缝。

品客薯片就是双曲抛物面的薯片，它的设计就是运用了这个原理。乐事薯片不是马鞍面，它只有一条抛物线，另一条是直线，这种结构虽然不如品客，但也有好处，一旦碎了会很对称，顺着中间的应力线变成两瓣，而品客结构稳固，不碎则以，一碎就是粉末状。品客的薯片制成是商业机密。



引发学生：感受数学的美以及在创造我们美好生活中的重大指导意义。

3. 抽象升华：用二次型化简一般二次曲面方程，引导同学们由特殊到一般的归纳推理能力。

教学方法和手段：进入课堂互动环节，启发同学们思考并通过雨课堂投屏作答，培养同学们由特殊到一般的归纳推理能力。

启发：回忆例1、例2化二次型为标准形的方法

思考：如何将二次曲面的一般方程化为标准方程。

二次曲面的 一般方程为:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+b_1x+b_2y+b_3z+c=0 \quad (1)$$

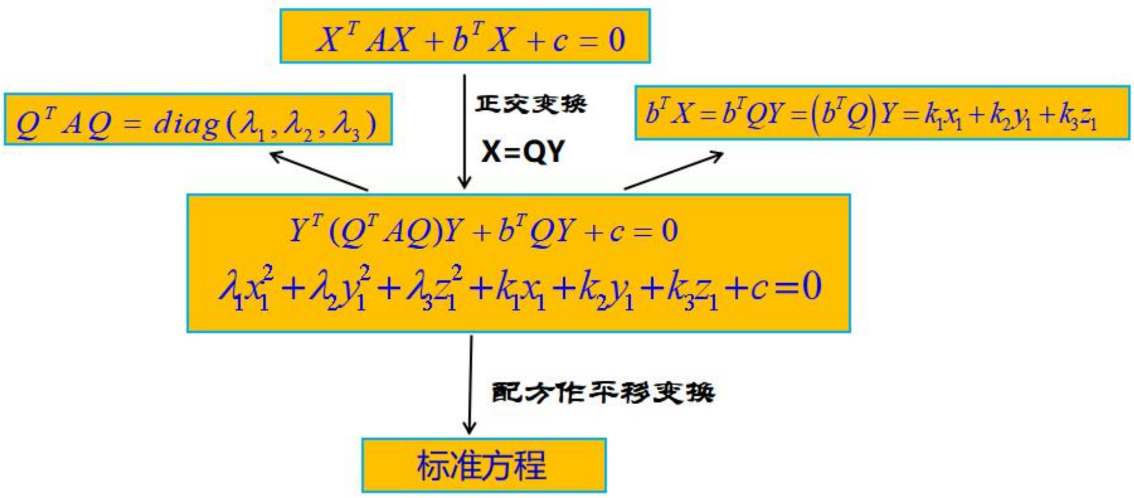
其中 $a_{ij}, b_i, c(i,j=1,2,3)$ 都是实数. 我们记

$$X=(x,y,z)^T,\ b=(b_1,b_2,b_3)^T,\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ 其中 $a_{ij}=a_{ji}$

利用二次型的表示方法，方程(1)可表示成下列形式:

$$X^TAX+b^TX+c=0 \quad (2)$$

具体方法：



4. 拓展与思考：二次曲面的类型与特征值的关系

由例1、例2这两个具体问题出发，启发、引导同学们思考如何将一般的二次曲面方程化为标准方程，以及高等数学中所讲的二次曲面是依据什么进行分类的。

5.教学总结

◆掌握用正交变换法化二次型为标准形

◆了解用二次型化二次曲面方程为标准方程的思路

◆数学家华罗庚曾经说过：宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，日用之繁，无处不用数学。通过这部分内容的学习，同学们可以体会到数学与生活密不可分，数学在不断改变我们的生活，使我们的周围变得更美好，希望同学们能从中体会到数学学习的乐趣，看到数学的魅力，激发学习热情，将来更好地为祖国建设出力。

7. 典型应用和计算软件的清单及展示

（1）行列式的应用

（2）行列式计算的 Matlab 实现举例

（3）矩阵乘法应用

（4）矩阵初等变换的应用

（5）向量组的应用

（6）矩阵的初等变换与方程组的解

（7）方阵的特征值及特征向量

（8）线性代数在机器学习中的应用

（9）线性代数在线性系统中的应用

1. 行列式应用

用二阶行列式求平行四边形的面积，用三阶行列式求平行六面体的体积.

在平面上，令向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_{11},a_{21})$，$\boldsymbol{\beta}=(a_{12},a_{22})$，则二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

的绝对值在几何上表示由向量$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$为邻边构成的平行四边形的面积. 事实上，由初等数学平面向量知识，平行四边形的面积为

$$S=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\sin\angle(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\sqrt{1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})^2}{|\boldsymbol{\alpha}|^2|\boldsymbol{\beta}|^2}}=\sqrt{|\boldsymbol{\alpha}|^2|\boldsymbol{\beta}|^2-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})^2}$$

$$=\sqrt{(a_{11}^2+a_{21}^2)(a_{12}^2+a_{22}^2)-(a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21})^2}$$

$$=\sqrt{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^2}=|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|=|D|.$$

令向量$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,y_3)$，$\boldsymbol{\gamma}=(z_1,z_2,z_3)$，则三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

的绝对值在几何上表示由向量$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$为棱的平行六面体的体积. 一个平行六面体可以由它的过同一顶点的三条边完全确定，这三条边可以用顶点为起点的三个向量来表示，因而这三个向量就完全确定了平行六面体的形状和大小.

以向量$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$为邻边构成的平行四边形作为底面，其底面积为$S=|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|$，而这个底面上的高是$h=|\boldsymbol{\gamma}|\cos\angle(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$，于是得平行六面体的体积为

$$V=|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|\,|\boldsymbol{\gamma}||\cos\angle(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})|=|(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}|,$$

根据向量混合积的计算公式得

$$V=|D|=\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\right|.$$

2. 行列式计算的 Matlab 实现举例

【例 1】 求解符号行列式方程 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2-x^2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 7-x^2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

【解】 计算行列式的值，得

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2-x^2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 7-x^2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{\underset{r_4-r_3}{=\!=}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x^2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2-x^2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}(1-x^2)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2-x^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-x^2)(2-x^2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(x^2-1)(2-x^2).$$

解方程得到

$$x = \pm 1,\quad x = \pm\sqrt{2}.$$

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
syms x                                          % 定义 x 为符号变量
A=[3,2,1,1;3,2,2-x^2,1;5,1,3,2;7-x^2,1,3,2];    %定义矩阵 A
D=det(A)                                        % 计算矩阵 A 的行列式 D
D =
-6+9*x^2-3*x^4                                  %A 的行列式值
f=factor(D)                                     % 对多项式 D 进行因式分解
f =
  -3*(x-1)*(x+1)*(x^2-2)
                                  % 从因式分解的结果，可以看出方程的解
X=solve(D)                        % 求方程 “D = 0” 的解
X =       -1
           1
        2^(1/2)
       -2^(1/2)
```

【例 2】 利用克莱姆法则求解下列线性方程组的解.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 \quad - 6x_4 = 9, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

【解】 计算下列行列式，得

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&1&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}=-4\neq 0，$$

$$D_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&1&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=-48，D_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108，$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&1&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-24，D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&1&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=52.$$

则非齐次线性方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=12，x_2=\frac{D_2}{D}=27，x_3=\frac{D_3}{D}=6，x_4=\frac{D_4}{D}=-13.$$

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
A=[2,1,-5,1;1,-3,0,-6;0,1,-1,2;1,4,-7,6];          % 输入系数矩阵A
A1=A; A2=A; A3=A; A4=A; b=[8,9,-5,0];
                        % 将A赋值给不同变量，b为常数项，为求Di准备
D=det(A);                              %求|A|
A1(:,1)=b ;                            % 将A中第1列替换为向量b
D1=det(A1);   x1=D1/D                  % 求D1继而求x1
x1 =                                   % 运行求出x1的值
     12
A2(:,2)=b ;                            % 将A中第2列替换为向量b
D2=det(A2);   x2=D2/D                  % 求D2继而求x2
x2 =                                   % 运行求出x2的值
    27
A3(:,3)=b ;                            % 将A中第3列替换为向量b
D3=det(A3);   x3=D3/D                  % 求D3继而求x3
x3 =                                   % 运行求出x3的值
    6
A4(:,4)=b ;                            % 将A中第4列替换为向量b
D4=det(A4);   x4=D4/D                  %求D4继而求x4
x4 =                                   % 运行求出x4的值
    -13
```

3. 矩阵乘法应用

（方阵的幂）交通网络：有如下网络

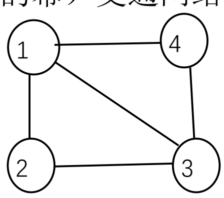


图 1-1

图 1-1 为 1，2，3，4 四个城市之间的空运航线，用有向图表示，求经过一次转机（也就是坐两次航班）能到达的城市.

【解】该图可以用下列邻接矩阵表示：

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

其中，第i行描述从城市i出发，可以到达各个城市的情况，若能到达第j个城市，记$a_{ij}=1$，否则$a_{ij}=0$，规定$a_{ii}=0$（其中$i,j=1,2,3,4$）. 如第 2 行表示：从城市 2 出发可以到达城市 1 而不能到达城市 2、3 和 4.

经过一次转机（也就是坐两次航班）能到达的城市，可以由邻接矩阵的平方 $\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_1^2$ 来求得.

$$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

其中第 2 行表示：从城市 2 出发经一次转机可以到达城市 3 和城市 4 而不能到达城市 1 和 2.

在 MATLAB 命令窗口中输入

```
A1=[0 0 1 1;1 0 0 0;0 1 0 0;1 0 1 0];          % 输入邻接矩阵 A
A2=A1^2                                         % 求 A^2
A2 =                                            % 经过一次转机能到达的城市
     1     1     1     0
     0     0     1     1
     1     0     0     0
     0     1     1     1
```

4. 矩阵初等变换的应用

【例 3】（求插值多项式）如下表所示：

t_i	0	1	2	3
$f(t_i)$	3	0	−1	6

给出了函数 $f(t)$ 图像上 4 个点的值，试求三次插值多项式 $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$，并求 $f(1.5)$ 的近似值.

【解】设三次多项式函数 $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$，由已知可以得到四元线性方程组：

$$\begin{cases} a_0 = 3, \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = -1, \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 6. \end{cases}$$

对增广矩阵施行初等行变换化为行阶梯形矩阵得

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & 3 & 9 & 27 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_2]{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 24 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3\div 2]{\substack{r_4-3r_3 \\ r_4\div 6}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3-r4]{r_3-3r_4} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

解方程组得

$$\begin{cases} a_0=3 \\ a_1=-2 \\ a_2=-2 \\ a_3=1 \end{cases}$$

三次多项函数为 $p(t)=3-2t-2t^2+t^3$.

代入 $t=1.5$ ， $p(1.5)=3-2\times1.5-2\times1.5^2+1.5^3=-1.125.$

在 MATLAB 命令窗口键入：

```
A=[1,0,0,0;1,1,1,1;1,2,4,8;1,3,9,27] ;      % 输入方程的系数矩阵
b=[3;0;-1;6] ;                              % 输入方程组常数项
R=rref([A,b])                               % 求增广矩阵的行最简
 R    =  1      0      0      0      3
         0      1      0      0     -2
         0      0      1      0     -2
         0      0      0      1      1
```

% 得到 $a_0=3, a_1=-2, a_2=-2, a_3=1$，三次多项函数为 $p(t)=3-2t-2t^2+t^3$

```
3-2*1.5-2*1.5^2+1.5^3                       % 计算 f(1.5)
ans =
     -1.1250
```

% 故 $f(1.5)$ 近似等于 $p(1.5)=3-2\times1.5-2\times1.5^2+1.5^3=-1.125.$

在一般情况下，当给出函数 $f(t)$ 在 $n+1$ 个点 $t_i(i=1,2,\cdots,n+1)$ 上的值 $f(t_i)$ 时，

就可以用 n 次多项式 $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n$ 对 $f(t)$ 进行插值.

【例 4】(调味品的配制问题)某调料有限公司用 8 种成分来制造多种调味料.一下(表 4.2.1)列出了 6 种调味料 A、B、C、D、E 及 F 每包所需各成分的量（以克为单位)：

表 4.2.1

	A	B	C	D	E	F
辣椒	3	1.5	4.5	7.5	9	4.5
姜黄	2	4	0	8	1	6
胡椒	1	2	0	4	2	3
欧莳萝	1	2	0	4	1	3
大蒜粉	0.5	1	0	2	2	1.5
糖	0.5	1	0	2	0	1.5
盐	0.5	1	0	2	2	1.5
丁香油	0.25	0.5	0	2	1	0.75

问题：（1）一顾客为了避免购买全部调味制品，它可以购买其中的一部分并用它们配制出其余几种调味品.为了能配制出其他几种，顾客须购买的最少的调味品的种类是多少？写出所需最少的调味品集合.

（2）（1）中得到的调味品集合是否唯一？可否找到另一个最小的调味品集合？

（3）利用你在（1）中找到的最小调味品集合，按下列成分组合秩配制一种新的调味品：

辣椒 18 ，姜黄 18 ，胡椒 9，欧莳萝 9，大蒜粉 4.5，糖 3.5，盐 4.5，丁香油 3.25.

【解】假设：分别设 6 种调味品各自配料的列向量分别为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_6$，则由题意，该问题实质上就是要求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_6$的极大无关组. 以其为列作矩阵，并对其施行行初等变换.

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 3 & 1.5 & 4.5 & 7.5 & 9 & 4.5 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0.5 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1.5 \\ 0.5 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1.5 \\ 0.5 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0 & 2 & 1 & 0.75 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（1）容易看出，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_6$的秩为 4，且极大无关组有 6 个，但由于问题的实际意义，其余向量由极大无关组表示的系数不能取负数，才符合实际情况.

利用初等变换进行矩阵行简化，得到极大线性无关组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$，其余向量可以用极大无关组表示，$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3$； $\boldsymbol{\alpha}_6=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3$.

即只需要购买 B、C、D、E 四种调味品就可以配制出全部调味品.

（2）从（1）中的分析可知，$\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$在极大无关组中是不可替代的，极大无关组中的另外两个向量只能从$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_6$中选，从$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_6$由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$线性表示式可以看出，任何移项都会出现负的系数，从而失去意义. 因此，(1) 中的最小调味品集合是唯一的.

（3）验证： 设$\boldsymbol{\beta}=(18,18,9,9,4.5,4.5,3.5,3.25)^T$则问题转化为向量$\boldsymbol{\beta}$能否由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$线性表示.

$$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5,\boldsymbol{\beta} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1.5 & 4.5 & 7.5 & 9 & 18 \\ 4 & 0 & 8 & 1 & 18 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4.5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3.5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4.5 \\ 0.5 & 0 & 2 & 1 & 3.25 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = 2.5\boldsymbol{\alpha}_2 + 1.5\boldsymbol{\alpha}_3 + 1\boldsymbol{\alpha}_4\text{,}$$

即知一包新调味品可由 2.5 包 B，1.5 包 C 加上一包 D 调味品配制而成.
在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
A=[3.1.5,4.5,7.5,9,4.5;2,4,0,8,1,6;1,2,0,4,2,3;1,2,0,4,1,3;0.5,1,0,2,2,1.5;0.5,1,0,2,0,1.5;0.5,1
,0,2,2,1.5;];                          %6 种调味品的成分矩阵 A
U=rref(A)                              %把矩阵 A 化为行最简型
    U =                                % 行最简型为：
         1     0     2     2     0     1
         0     1    -1     1     0     1
         0     0     0     0     1     0
         0     0     0     0     0     0
         0     0     0     0     0     0
         0     0     0     0     0     0
         0     0     0     0     0     0
```

【例 5】（减肥配方问题）设三种食物每 100 克中蛋白质、碳水化合物和脂肪的含量如下表 4.1.1 所示，表中还给出了 20 世纪 80 年代美国流行的简洁营养配方. 如果用这三种食物作为每天的主要食物，那么它们的用量应各取多少，才能全面准确地实现这个营养要求？

表 4.1.1

营养成分	每 100g 食物所含营养（g）			减肥所要求的每日营养量
	脱脂牛奶	大豆粉	乳清	
蛋白质	36	51	13	33
碳水化合物	52	34	45	45
脂肪	0	7	1.1	3

【解】设脱脂牛奶、大豆粉和乳清用量分别为 x_1,x_2,x_3 个单位（100g），三种

食物所含营养的列向量分别为$\boldsymbol{\alpha}_1=(36,52,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(51,34,7)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(13,74,1.1)^T$，每日所需营养量的列向量为$\boldsymbol{b}=(33,45,3)^T$. 由题意，三种食物每日所需量的多少恰好为向量$\boldsymbol{b}$由向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$和$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示的系数，所以，$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b}$，即

$$\begin{pmatrix}36&51&13\\52&34&74\\0&7&1.1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33\\45\\3\end{pmatrix}$$

求解有$(x_1,x_2,x_3)^T=(0.2772,0.3919,0.2332)^T$. 由此可知每日所需三种食物的量分别为脱脂牛奶 27.72 克，大豆粉 39.19 克，乳清 23.32 克.

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
A=[36,51,13;52,34,74;0,7,1.1];     %输入营养需求方程系数矩阵
b=[33;45;3];                       %输入营养需求方程常数项
U=rref([A,b])                      %把增广矩阵[A,b]化为行最简型
  U=                                % 得到的阶梯型矩阵为：
        1.0000         0         0    0.2772
             0    1.0000         0    0.3919
             0         0    1.0000    0.2332
```

5. 向量组的应用

【例 6】 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$为满秩矩阵，试判断两直线

$$L_1:\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}，\quad L_2:\frac{x-a_2}{a_1-a_3}=\frac{y-b_2}{b_1-b_3}=\frac{z-c_2}{c_1-c_3}$$

的关系.

【解】 将$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i)^T(i=1,2,3)$看作空间中的三点$M_i(i=1,2,3)$对应的向量，由空间解析几何中关于向量的混合积的几何意义知，

直线L_1,L_2共面的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$三向量共面（线性相关），显然，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$$

所以，直线L_1,L_2共面. 又令

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0},$$

即
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2-(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩，即向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以，$k_1=k_2=0$，

因此，向量 $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，即向量 $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,与 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 不平行，也就是说，两直线的方向向量不平行．故，直线 L_1,L_2 相交.

【例 7】 设向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,5,-3)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-1,-2,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(5,4,-19,15)^T$， $\boldsymbol{\alpha}_4=(-10,-1,16,-15)^T$，

求该向量组的极大无关组，并把其余向量由极大无关组线性表示.

【解】对由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 构成的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换化为行最简型矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1&4&5&-10\\-2&-1&4&-1\\5&-2&-19&16\\-3&3&15&-15\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+3r_1]{\substack{r_2+2r_1\\ r_3-5r_1}}\begin{pmatrix}1&4&5&-10\\0&7&14&-21\\0&-22&-44&66\\0&15&30&-45\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4\div 15]{\substack{r_2\div 7\\ r_3\div(-22)}}\begin{pmatrix}1&4&5&-10\\0&1&2&-3\\0&1&2&-3\\0&1&2&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-4r_2}\begin{pmatrix}1&0&-3&2\\0&1&2&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为一组极大无关组，且，$\boldsymbol{\alpha}_3=-3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ ， $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2$

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

Matlab 命令：

A=[1,-2,5,-3;4,-1,-2,3;5,4,-19,15;-10,-1,16,-15]';↙ %生成与向量组对应的矩阵 A

rank(A)↙ %计算向量组的秩

ans =

2 % 秩为 2，小于向量组中向量的个数 4，向量组线性相关

[R,jb]=rref(A)↙ % 把矩阵 A 为行最简型

R =

1	0	-3	2
0	1	2	-3
0	0	0	0
0	0	0	0

jb = %jb 是一个向量，其元素为列向量组的极大无关组中向量所在的列

1 2

A(:,jb)↙ %输出列向量组的极大无关组

ans = %$\boldsymbol{\alpha}_1=\ 1,-2,5,-3\ ^T,\boldsymbol{\alpha}_2=\ 4,-1,-2,3\ ^T$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大无关组

1 4

【例 8】求两个向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1\quad 2\quad 3)^T$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(1\quad 0\quad -1)^T$ 的内积.

【解】向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=(1\quad 2\quad 3)^T(1\,0\,-1)=-2$$

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
a=[1 2 3];b=[1 0 -1];              %输入两个向量
dot(a,b)              % 命令 dot(a,b)或 a'*b(a,b 是列向量)求向量 a,b 的内积
ans =                 % 向量内积为-2
      -2
a*b'                % a,b 的内积
ans =               % 若 dot(x,y)=0, 则 x 和 y 正交.
      -2
```

【例 9】求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1\quad 1\quad 1)^T$ 的模.

【解】向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模为：

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$$

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
a=[1 1 1]';        %向量 a
b=norm(a)         %命令 norm(x)求向量 a 的模
b =
     1.7321
c=sqrt(a'*a)        % sqrt (x'*x) 求向量 a 的模
c =
     1.7321
```

【例 10】判断向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2\quad -1\quad 4)^T$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(-4\quad -4\quad 1)^T$ 是否正交.

【解】向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=(2\quad -1\quad 4)^T(-4\quad -4\quad 1)=0$$

又$\because\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=0$，故向量向量$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$正交.

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
a=[2 -1 4]';b=[-4 -4 1]';            %输入向量 a, b
c=dot(a,b)                          %求向量 a, b 的内积
c =                                 %运算结果：
         0                          %    dot(a,b)=0, 则 a 和 b 正交.
```

【例 11】　已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$构成$\boldsymbol{R}^3$的基，其中$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. 用施密特正交化方法求$\boldsymbol{R}^3$的一个标准正交基.(用 Matlab 实施)

【解】将$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$正交化，得到

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$$

再将$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$单位化，得到

$$\gamma_1 = \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\gamma_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \frac{\sqrt{6}}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\gamma_3 = \frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$$

γ_1，γ_2，γ_3为$\boldsymbol{R}^3$的一个标准正交基.

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

Matlab 命令：

```
A=[1,1,1;1,1,0;1,0,0];↙          %以向量α1,α2,α3为列生成矩阵 A
B=orth(A)↙                       %将矩阵 A 正交规范化并存为矩阵 B
B =                              %B 的三个列向量即为 R^3 的一组标准正交基
     -0.7370    0.5910    0.3280
     -0.5910   -0.3280   -0.7370
     -0.3280   -0.7370    0.5910
B'*B↙                            %验证矩阵 B 是否为正交矩阵
ans =                            %验证的结果说明 B 是正交矩阵
     1.0000    0.0000    0.0000
     0.0000    1.0000    0.0000
```

【例 12】判断向量$\boldsymbol{\alpha}=(2,-1,4)^T$ 和$\boldsymbol{\beta}=(-4,-4,1)^T$ 是否正交.

【解】向量$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的内积为

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=(2,-1,4)(-4,-4,1)^T=0$$

又$\because\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=0$，故向量向量$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$正交.

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
a=[2, -1, 4]'  ;b=[-4, -4 ,1]'  ;        % 输入向量 a, b
c=dot(a,b)                              % 求向量 a, b 的内积
c =                                     % 运算结果：
        0                               %  dot(a,b)=0, 则 a 和 b 正交.
```

6. 矩阵的初等变换与方程组的解

【例 13】(化学方程式配平问题）在用化学方法处理污水过程中，有时会涉及到复杂的化学反应.这些反应的化学方程式是分析计算和工艺设计的重要依据.在定性地检测出反应物和生成物之后，可以通过求解线性方程组配平化学方程式.

某厂废水中含 KCN,其浓度为 650mg/L.现用氯氧化法处理，发生如下反应：

$$KCN+2KOH+Cl_2=KOCN+2KCl+H_2O.$$

投入过量液氯，可将氰酸盐进一步氧化为氮气.请配平化学方程式：

$$\_\_\_KOCN+\_\_\_KOH+\_\_\_Cl_2=\_\_\_CO_2+\_\_\_N_2+\_\_\_KCl+\_\_\_H_2O.$$

【解】设$x_1KOCN+x_2KOH+x_3Cl_2=x_4CO_2+x_5N_2+x_6KCl+x_7H_2O$.则

$$\begin{cases} x_1+x_2=x_6 \\ x_1+x_2=2x_4+x_7 \\ x_1=x_4 \\ x_1=2x_5 \\ x_2=2x_7 \\ 2x_3=x_6 \end{cases}，即 \begin{cases} x_1+x_2-x_6=0, \\ x_1+x_2-2x_4-x_7=0, \\ x_1-x_4=0, \\ x_1-2x_5=0, \\ x_2-2x_7=0, \\ 2x_3-x_6=0. \end{cases}$$

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
A=[1,1,0,0,0,-1,0;1,1,0,-2,0,0,-1;1,0,0,-1,0,0,0;1,0,0,0,-2,0,0;0,1,0,0,0,0,-2;0,0,2,0,0,-
1,0];                                                   % 输入系数矩阵 A
disp('齐次线性方程组的基础解系为：')                      % 输出提示信息
x=null(A,'r')                       % 求齐次线性方程组 Ax＝0 的基础解系 x
齐次线性方程组的基础解系为：
x =
      1
      2
    3/2
```

可见上述齐次线性方程组的通解为： $x=k(1,2,\frac{3}{2},1,\frac{1}{2},3,1)^T$.

取 $k=2$ 得 $x=\ 2,4,3,2,1,6,2\ ^T$. 可见配平后的化学方程式如下：

$2KOCN+4KOH+3Cl_2=2CO_2+N_2+6KCl+2H_2O.$

【例 14】（平面间的位置关系） 试讨论三平面

$$x+2y+z=1,\ \ 2x+3y+(a+2)z=3,\ \ x+ay-2z=0$$

的相互位置关系.

【解】 因为这三个平面的法向量互不平行，所以三平面互不平行. 由于三平面的联立方程组的每一个解都表示这三平面的一个交点，因此，考察联立线性方程组的解的情况，对其增广矩阵施行初等行变换得

$$A=\ \boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b}\ =\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+(a-2)r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&(a-3)(a+1)&a-3\end{array}\right),$$

于是由行阶梯形矩阵可知：

（1）当 $a\neq 3$ 且 $a\neq -1$ 时， $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})=3$（未知量的个数），方程组有唯一解，即三个平面有一个交点；

（2）当 $a=3$ 时， $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})=2<3$ ，方程组有无穷多解，通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad （k\text{ 为任意常数}）.$$

上述解集合表示过 点（3，－1，0），以（－7，3，1）为方向向量的空间直线，通解表达式即直线的参数方程．故此时三个平面相交于一条直线.

（3）当 $a=-1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2<R(A)=3$，这时方程组无解，故此时三个平面没有公共点，又因为三个平面互不平行，因此，三个平面两两相交于一条直线.

【例 15】求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-x_3+4x_4+16x_5=-2, \\ -3x_1-6x_2+2x_3-6x_4-23x_5=7, \\ 3x_1+6x_2-4x_3+6x_4+19x_5=-23, \\ x_1+2x_2+5x_3+2x_4+19x_5=43 \end{cases}$$

的通解以及对应齐次线性方程组的基础解系.

【解】对非齐次线性方程组的增广矩阵进行初等行变换化为行最简阶梯形，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 4 & 16 & -2 \\ -3 & -6 & 2 & -6 & -23 & 7 \\ 3 & 6 & -4 & 6 & 19 & -23 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 19 & 43 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-2r_1}]{\substack{r_1\leftrightarrow r_4 \\ r_2+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 & 19 & 43 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & -19 & 0 & -38 & -152 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & -22 & -88 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4\div -11}]{\substack{r_2\div -2 \\ r_3\div -19}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 & 19 & 43 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 & 19 & 43 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-5r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 19 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得方程组通解为：

$$\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{其中 } k_1,\ k_2,\ k_3 \text{ 为任意实数.}$$

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
A=[2,4,-1,4,16;-3,-6,2,-6,-23;3,6,-4,6,19;1,2,5,2,19];       % 输入系数矩阵 A
b=[-2;7;-23;43];                                              % 输入常数列向量 b
B=[A b];                        %B 为增广矩阵
[R,s]=rref(B);                  % R 为增广矩阵的最简行阶梯矩阵
                                % s 为 R 的所有基准元素在矩阵中的列号
[m,n]=size(A);                  % m 为矩阵 A 的行数、n 为矩阵 A 列数
Ra=rank(A);                     %R 为系数矩阵 A 的秩
Rb=rank(B);                     %Rr 为增广矩阵的秩
if Ra==Rb&Ra==n                 % n 为未知量的个数，判断是否有唯一解
   disp('非齐次线性方程组有唯一解：')
   x=A\b;                       % 求出唯一解 x
elseif Ra==Rb&Ra<n              % 判断是否有无穷多解
   disp('非齐次线性方程组有无穷多解：')
x0=zeros(n,1);                  % 将特解 x0 初始化为 N 维零向量
   r=length(s);                 % 矩阵 A 的秩（非零行行数）赋给变量 r
   x0(s,:)=R(1:r,end);          % 将矩阵 R 的最后一列按基准元素的位置给特解 x0 赋值
   disp('非齐次线性方程组的特解为：')          % 显示特解 x0
   x0
```

```
   disp('对应齐次线性方程组的基础解系为：')       % 显示提示信息
   C=null(A,'r')                                  %求 AX=0 的基础解系
else
   disp('非齐次线性方程组无解：')                 % 判断是否无解
end
运行结果：
非齐次线性方程组有无穷多解：
非齐次线性方程组的特解为：
x0 =
      3
      0
      8
      0
      0
对应齐次线性方程组的基础解系为：
C =
     -2      -2      -9
      1       0       0
      0       0      -2
      0       1       0
      0       0       1
```

故可求出方程组的通解为：

$$\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-9\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\8\\0\\0\end{pmatrix}$$

【例 16】当k取何值时，方程组$\begin{cases}(1-2k)x_1+3x_2+3x_3+3x_4=0,\\ 3x_1+(2-k)x_2+3x_3+3x_4=0,\\ 3x_1+3x_2+(2-k)x_3+3x_4=0,\\ 3x_1+3x_2+3x_3+(11-k)x_4=0.\end{cases}$有非零解？在有非零解的情况下，求出其基础解系.

【解】

齐次线性方程组的系数矩阵 A 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1-2k & 3 & 3 & 3\\ 3 & 2-k & 3 & 3\\ 3 & 3 & 2-k & 3\\ 3 & 3 & 3 & 11-k\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1-2k & 3 & 3 & 3\\ 3 & 2-k & 3 & 3\\ 3 & 3 & 2-k & 3\\ 3 & 3 & 3 & 11-k\end{vmatrix}\xlongequal[c_2-c_1]{\substack{c_4-c_3\\ c_3-c_2}}\begin{vmatrix}1-2k & 2+2k & 0 & 0\\ 3 & -1-k & k+1 & 0\\ 3 & 0 & -1-k & k+1\\ 3 & 0 & 0 & 8-k\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_3}\begin{vmatrix}1-2k & 2+2k & 0 & 0\\ 6 & -1-k & 0 & k+1\\ 3 & 0 & -1-k & k+1\\ 3 & 0 & 0 & 8-k\end{vmatrix}=-1-k\begin{vmatrix}1-2k & 2+2k & 0\\ 6 & -1-k & k+1\\ 3 & 0 & 8-k\end{vmatrix}$$

$$=-1-k\left(3\begin{vmatrix}2+2k & 0\\ -1-k & k+1\end{vmatrix}+8-k\begin{vmatrix}1-2k & 2+2k\\ 6 & -1-k\end{vmatrix}\right)$$

$$=-1-k\left(6(k+1)^2+(8-k)(k+1)(2k-13)\right)$$

$$=(k+1)^2\left(k-\frac{7}{2}\right)(k-14)$$

显然$|A|\neq 0$，方程组有唯一零解，则当$k=-1,k=\dfrac{7}{2},k=14$时方程组有非零解.

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
syms k                                          % 定义符号变量 k
A=[1-2*k,3,3,3;3,2-k,3,3;3,3,2-k,3;3,3,3,11-k];  % 给系数矩阵赋值
D=det(A);                                       % 算出系数矩阵的行列式 D
kk=solve(D);                                   % 解方程 “D = 0”, 得到解 kk, 即 k 值
for i=1:4
     AA=subs(A,k,kk(i));                       % 分别把 k 值代入系数矩阵 A 中
     fprintf('当 k=');
     disp(kk(i));                              % 显示 k 的取值
     fprintf('基础解系为：\n');
     disp(null(AA))                      % 计算齐次线性方程组 “Ax=0” 的基础解系
end
```

```
运行结果如下：
当 k=      7/2
基础解系为：
                    [-1/2]
                    [    ]
                    [ -1 ]
                    [    ]
                    [ -1 ]
                    [    ]
                    [1   ]
当 k=      14
基础解系为：
                    [1/5]
                    [   ]
                    [2/5]
                    [   ]
                    [2/5]
                    [   ]
                    [ 1 ]
当 k=     -1
基础解系为：
                  [-1     -1]
                  [         ]
                  [ 0      1]
                  [         ]
```

7. 方阵的特征值及特征向量

【例 17】(特征值和特征向量的几何意义)对于一个给定的矩阵 $\boldsymbol{A}$（在线性代数中常被看做是一种特殊的线性变换），它的特征向量 $\boldsymbol{x}$ 经过它作用之后，得到的新向量 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ 仍然与原来的 $\boldsymbol{x}$ 保持在同一条直线上，但其长度也许会改变. 实际上，特征值是一个特征向量的长度在该矩阵作用下缩放的比例. 如图 6-2 是《蒙娜丽莎》以及其左右翻转的图像，

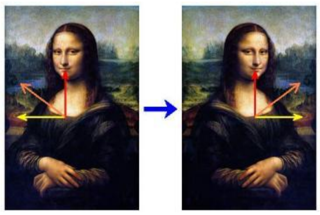
当蒙娜丽莎的图像左右翻转时，中间垂直的红色向量方向保持不变. 而水平方向上黄色的向量的方向完全反转，因此它们都是左右翻转变换的特征向量. 红色向量长度不变，其特征值为 1. 黄色向量长度也不变但方向变了，其特征值为-1. 橙色向量在翻转后和原来的向量不在同一条直线上，因此不是特征向量.

图 6-2

【例 18】（人口流动问题）设某国人口流动状态的统计规律是每年有十分之一的城市人口流向农村，十分之二的农村人口流向城市. 假定人口总数不变，那么经过多少年后，全国人口将会集中在城市？

【解】 最初城市和农村人口分别为 x_0, y_0，第 m 年城市和农村人口分别为 x_m, y_m，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$



$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{m-1} \\ y_{m-1} \end{pmatrix},$$

由此推得

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^m\begin{pmatrix} x_{m-1} \\ y_{m-1} \end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-0.9 & -0.2 \\ -0.1 & \lambda-0.8 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-0.7)$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

$\lambda_1=1,\lambda_2=0.7$．它们对应的特征向量分别$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

令$\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$，得$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}$，因而有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0.7\end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^m&=\left(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\right)^m=\boldsymbol{P\Lambda}^m\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^m&0\\0&0.7^m\end{pmatrix}^m\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times0.7^m&\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times0.7^m\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times0.7^m&\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times0.7^m\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=A^m\begin{pmatrix}x_{m-1}\\y_{m-1}\end{pmatrix}=(x_0+y_0)\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}+(x_0-2y_0)0.7^m\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

当$m\to\infty$时，$0.7^m\to0$, 故

$$\begin{pmatrix}x_\infty\\y_\infty\end{pmatrix}=(x_0+y_0)\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

即当$m\to\infty$时，城市与农村人口为 2:1,趋于稳定得分布状态.

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
 syms x0 y0   n;                  %定义符号变量
A=[0.9 0.2;0.1 0.8];              %定义矩阵 A
[d,v]=eig(A)                      %求矩阵 A 的特征值 v 和特征向量 d
An=d*v.^n*inv(d)                  %求 PΛ^m P^-1
Y=An*[x0;y0]                     %求出 n 年后人口分布情况
%运行结果如下：
d =
     0.8944    -0.7071
     0.4472     0.7071
v =
     1.0000          0
          0     0.7000
An =
[ 2/3+1/3*(7/10)^n, 2/3-2/3*(7/10)^n]
[ 1/3-1/3*(7/10)^n, 1/3+2/3*(7/10)^n]
Y =
 (2/3+1/3*(7/10)^n)*x0+(2/3-2/3*(7/10)^n)*y0
 (1/3-1/3*(7/10)^n)*x0+(1/3+2/3*(7/10)^n)*y0
```

【注】许多实际问题常归结为矩阵的对角化，实则也是求方阵的高次幂问题，比如本例的人口流动问题，类似地还有遗传问题、从业问题等等. 事实上，当 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化时，计算其高次幂 $\boldsymbol{A}^k$ 的方法为：

$$\boldsymbol{A}^k=\left(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\right)\cdots\left(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\right)=\boldsymbol{P\Lambda}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{\Lambda}\cdots\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{\Lambda P}^{-1}=\boldsymbol{P\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1},$$

而对于对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，有 $\boldsymbol{\Lambda}^k=\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)$，故

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)\boldsymbol{P}^{-1}.$$

【例 6.22】 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2&-20&-19\\-2&16&-9&11\\-8&4&-6&1\\0&-8&-4&-7\end{pmatrix}$，利用 MATLAB 求其特征值.

【解】

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

方法一

```
A=[2,-2,-20,-19;-2,16,-9,11;-8,4,-6,1;0,-8,-4,-7];    % 生成矩阵 A
syms k                                                % 定义符号变量 k
B=A-k*eye(length(A));                                 % 构造矩阵 B=(A-kE)
D=det(B);                                             % 计算行列式|A-kE|
lamda1=solve(D)                                       % 求|A-kE|=0 的符号形式解
lamda1 =                                              %运行结果如下：
          [12]
          [           1/3              1          ]
          [- 1/3 %1       - 385/3 ----- - 7/3]
          [                            1/3        ]
          [                            %1         ]
          [         1/3              1
          [1/6 %1       + 385/6 ----- - 7/3
          [                          1/3
          [                          %1
                    1/2 /            1/3               1    \]
           + 1/2    i 3       |- 1/3 %1       + 385/3 -----|]
                              |                          1/3|]
                              \                        %1    /]
          [         1/3              1
          [1/6 %1       + 385/6 ----- - 7/3
          [                          1/3
          [                          %1
                    1/2 /            1/3               1    \]
           - 1/2    i 3       |- 1/3 %1       + 385/3 -----|]
                              |                          1/3|]
                              \                        %1    /]
                                     1/2
  %1 := 19585 + 120 22674
```

方法二

```
A=[2,-2,-20,-19;-2,16,-9,11;-8,4,-6,1;0,-8,-4,-7];    % 生成矩阵 A
P=poly(A);                                            % 计算矩阵 A 的多项式，向量 p 的
                                                      % 元素为该多项式系数
Lamda2=roots(P)                                       % 求该多项式的零点，即特征值
运行结果如下：
 Lamda2 =
 -17.3347
  12.0000
   5.1673 + 6.3598i
   5.1673 - 6.3598i
```

方法三

```
A=[2,-2,-20,-19;-2,16,-9,11;-8,4,-6,1;0,-8,-4,-7];     % 生成矩阵 A
Lamda3=eig(A)                                           % 直接求矩阵 A 的特征值
运行结果如下：
 Lamda3 =
 -17.3347
    5.1673 + 6.3598i
    5.1673 - 6.3598i
   12.0000
```

【例 19】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，利用 MATLAB 工具

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

（2）判断 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化？若能，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\varLambda}$，其中 $\boldsymbol{\varLambda}$ 为对角矩阵.

【解】在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
A=[1 -1 -1 -1;-1 1 -1 -1;-1 -1 1 -1;-1 -1 -1 1];       % 生成矩阵 A
[V,D]=eig(A)                                          % 直接求矩阵 A 的特征值、特征向量
运行结果如下：
V =
      0.5000    -0.2113    -0.2887     0.7887
      0.5000     0.7887    -0.2887    -0.2113
      0.5000    -0.5774    -0.2887    -0.5774
      0.5000          0     0.8660          0
D =

    -2.0000          0          0          0
          0     2.0000          0          0
          0          0     2.0000          0
          0          0          0     2.0000
```

r=rank(2*eye(4)-A)   % 带入三重根 $\lambda=2$ ，求 $(\lambda E-A)p=0$ 的系数矩阵的秩

r =

1   % $n-r=3$ 说明 $\lambda=2$ 时，有三个线性无关的特征向量

% $\boldsymbol{A}$ 有 4 个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似

inv(V)*A*V   % V 即为可逆矩阵 P，D 即为对角阵，验证 $\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{Ap}=\boldsymbol{D}$

```
ans =
    -2.0000          0    -0.0000    -0.0000
    -0.0000     2.0000     0.0000     0.0000
     0.0000     0.0000     2.0000     0.0000
    -0.0000    -0.0000     0.0000     2.0000
```

【例 20】（人口流动问题）设某国人口流动状态的统计规律是每年有十分之一的城市人口流向农村，十分之二的农村人口流向城市．假定人口总数不变，那么经过多少年后，全国人口将会集中在城市？

【解】 最初城市和农村人口分别为 x_0,y_0，第 m 年城市和农村人口分别为 x_m,y_m，则

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.9&0.2\\0.1&0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.9&0.2\\0.1&0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{m-1}\\y_{m-1}\end{pmatrix},$$

由此推得

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} x_{m-1} \\ y_{m-1} \end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-0.9 & -0.2 \\ -0.1 & \lambda-0.8 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-0.7)$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=0.7$． 它们对应的特征向量分别 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$，因而有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，有

$$\boldsymbol{A}^m = \left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\right)^m = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^m\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^m & 0 \\ 0 & 0.7^m \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 0.7^m & \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 0.7^m \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times 0.7^m & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 0.7^m \end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = A^m \begin{pmatrix} x_{m-1} \\ y_{m-1} \end{pmatrix} = (x_0+y_0)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + (x_0-2y_0)0.7^m \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

当 $m \to \infty$ 时，$0.7^m \to 0$, 故

$$\begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \end{pmatrix} = (x_0+y_0)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

即当$m \to \infty$时，城市与农村人口为 2:1,趋于稳定得分布状态.

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
syms x0 y0    n;                    %定义符号变量
A=[0.9, 0.2;0.1, 0.8];              %定义矩阵 A
[d,v]=eig(A)                        %求矩阵 A 的特征值 v 和特征向量 d
An=d*v.^n*inv(d)                    %求 PΛ^m P^-1
Y=An*[x0;y0]                        %求出 n 年后人口分布情况
                                    %运行结果如下：
d =
     0.8944     -0.7071
     0.4472      0.7071
v =
     1.0000           0
          0      0.7000
An =
   [ 2/3+1/3*(7/10)^n, 2/3-2/3*(7/10)^n]
   [ 1/3-1/3*(7/10)^n, 1/3+2/3*(7/10)^n]
Y =
   (2/3+1/3*(7/10)^n)*x0+(2/3-2/3*(7/10)^n)*y0
   (1/3-1/3*(7/10)^n)*x0+(1/3+2/3*(7/10)^n)*y0
```

【注】许多实际问题常归结为矩阵的对角化，实则也是求方阵的高次幂问题，比如本例的人口流动问题，类似地还有遗传问题、从业问题等等. 事实上，当n阶方阵$\boldsymbol{A}$可相似对角化时，计算其高次幂$\boldsymbol{A}^k$的方法为：

$$\boldsymbol{A}^k=\left(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\right)\cdots\left(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\right)=\boldsymbol{P\Lambda}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{\Lambda}\cdots\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{\Lambda P}^{-1}=\boldsymbol{P\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1},$$

而对于对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，有$\boldsymbol{\Lambda}^k=\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)$，故

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)\boldsymbol{P}^{-1}.$$

【例 21】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$，利用 MATLAB 工具

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

（2）判断 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化？若能，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵.

【解】矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&1&1\\1&\lambda-1&1&1\\1&1&\lambda-1&1\\1&1&1&\lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}\lambda+2&1&1&1\\\lambda+2&\lambda-1&1&1\\\lambda+2&1&\lambda-1&1\\\lambda+2&1&1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&\lambda-1&1&1\\1&1&\lambda-1&1\\1&1&1&\lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&\lambda-2&0&0\\0&0&\lambda-2&0\\0&0&0&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)(\lambda-2)^3,$$

令 $(\lambda+2)(\lambda-2)^3=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$.

当 $\lambda_1=-2$ 时，求解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{-2E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的非零解如下：

由 $-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3&1&1&1\\1&-3&1&1\\1&1&-3&1\\1&1&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，

因此属于特征值 $\lambda_1=-2$ 的所有特征向量为 $k_1\boldsymbol{p}_1\,(k_1\neq0)$；

当 $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$ 时，求解齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的非零解如下：

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$p_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$p_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

因此属于特征值$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$的所有特征向量为 $k_2p_2+k_3\boldsymbol{p}_3+k_4p_4$ （k_2 , k_3 , k_4 不全为零).

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，并有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

$$\Lambda=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
A=[1, -1 ,-1 ,-1;-1, 1, -1, -1;-1 ,-1, 1, -1;-1 ,-1, -1 ,1];     % 生成矩阵 A
[V,D]=eig(A)                                           % 直接求矩阵 A 的特征值、特征向量
运行结果如下：
V =
     0.5000    -0.2113    -0.2887     0.7887
     0.5000     0.7887    -0.2887    -0.2113
     0.5000    -0.5774    -0.2887    -0.5774
     0.5000          0     0.8660          0
D =

   -2.0000          0          0          0
         0     2.0000          0          0
         0          0     2.0000          0
         0          0          0     2.0000

r=rank(2*eye(4)-A)     % 带入三重根 λ=2 ，求 (λE−A)p=0 的系数矩阵的秩

r =
      1                  % n−r=3说明λ=2时，有三个线性无关的特征向量
                         % A 有 4 个线性无关的特征向量，故 A 与对角阵相似

inv(V)*A*V               % V 即为可逆矩阵 P，D 即为对角阵，验证 p^-1 Ap = D

ans =
   -2.0000          0    -0.0000    -0.0000
   -0.0000     2.0000     0.0000     0.0000
    0.0000     0.0000     2.0000     0.0000
   -0.0000    -0.0000     0.0000     2.0000
```

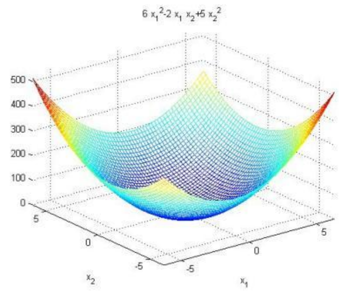
5. 应用 Matlab 软件将二次型化为标准形过程如下：

```
A=[0,1,1;1,0,1;1,1,0];                 %  生成二次型的矩阵 A
[V,D]=eig(A)                           %  数值计算矩阵 A 的特征向量与特征值
V =                                    %  V 的列向量是 A 的特征向量的数值解
            -535/748       523/1328       780/1351
             237/14314  -7729/9468       780/1351
            1273/1822      935/2213       780/1351
D =                                    %  A 与特征向量 V 对应的特征值的数值解
              -1              0              0
               0             -1              0
               0              0              2
orth(V)                                % 将 V 正交规范化
ans =                                  % 所求正交矩阵 P 的数值解
            -535/748       1495/2177      1404/10819
             237/14314     -231/1367      1561/1584
            1273/1822      1484/2099       188/1717
```

6. 在 MATLAB 命令窗口输入如下命令：

```
% 绘制二次型的对应的二次曲面
A=[6 -1 ;-1 5];              % 输入二次型矩阵 A
lamda=eig(A)                 % 求特征值
                             %求出的特征值全为正故正定
ezmesh( '6*x1^2-2*x1*x2+5*x2^2' );     %  绘制二次型
```

结果为正定，二次型 f 的图形如图 7-3 所示.



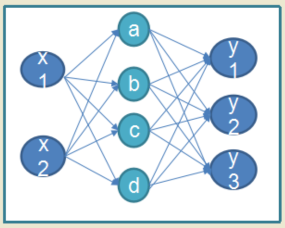
8.线性代数在机器学习中的应用

梯度下降中的矩阵

1. 假设网络层为2，4，3

2. 计算输出层 $\delta = \left(\begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.9 \\ 0.9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{bmatrix}$ 其中 $z' = \sigma'(wx+b)$，

输出层b $= \delta = \begin{bmatrix} \delta'1 \\ \delta'2 \\ \delta'3 \end{bmatrix} =$ 3*1 矩阵



3. 输出层权重w $= \begin{bmatrix} \delta'1 \\ \delta'2 \\ \delta'3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma a \\ \sigma b \\ \sigma c \\ \sigma d \end{bmatrix}^T = 3 * 4$ 矩阵

4. 输出层上一层 $\delta^l = ((w^{l+1})T\delta^{l+1})$ 点乘 $\sigma'(z^l) = w(4 * 3)(3 * 1) \begin{bmatrix} z'_a \\ z'_b \\ z'_c \\ z'_d \end{bmatrix} =$ 4x1矩阵

5. 输出层上一层 $w^l = \begin{bmatrix} \delta'a \\ \delta'b \\ \delta'c \\ \delta'd \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma x1 \\ \sigma x2 \end{bmatrix}^T =$ 4*2 矩阵

【python-机器学习】

1. Numpy基础操作

目录

1. 向量的基本操作

2. 矩阵的基本操作

2.1 创建矩阵

2.2 选择元素

2.3 展示属性

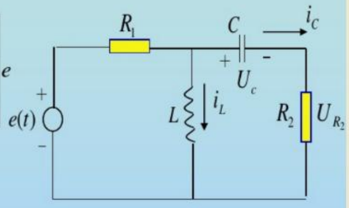
2.4 基础计算

```python
#加载库
import numpy as np

#创建一个行向量
vector_row=np.array([1,2,3,4,5])

#创建一个列向量
vector_column=np.array([[1],[2],[3],[4],[5]])

#选择向量中的一个元素
print(vector_row[2])    # 3
print(vector_column[2])    # [3]

#选取一个向量中的所有元素
print(vector_row[:])    #[1,2,3,4,5]

#向量的切片操作
print(vector_row[:2])      #[1 2]
print(vector_column[:2])  # [[1]
                          #  [2]]
```

9.线性代数在线性系统中的应用

线性系统的状态空间描述

$$\begin{bmatrix}\dot u_c\\ \dot i_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{(R_1+R_2)C} & -\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C}\\ \dfrac{R_1}{L(R_1+R_2)} & -\dfrac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_c\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(R_1+R_2)C}\\ \dfrac{R_2}{L(R_1+R_2)}\end{bmatrix}e$$



$$u_{R_2}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2} & -\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_c\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\end{bmatrix}e$$

$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{(R_1+R_2)C} & -\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C}\\ \dfrac{R_1}{L(R_1+R_2)} & -\dfrac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(R_1+R_2)C}\\ \dfrac{R_2}{L(R_1+R_2)}\end{bmatrix}u$$

以上方程可表为形如

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

$$y=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2} & -\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\end{bmatrix}u$$

Linear Algebra　BUCT

结论1　给定单输入,单输出线性时不变系统的输入输出描述,

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y^{(1)}+a_0y=b_mu^{(m)}+b_{m-1}u^{(m-1)}+\cdots+b_1u^{(1)}+b_0u$$

$$g(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s^1+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

其对应的状态空间描述可按如下两类情况导出

(1)m=n,即系统为真情形

$$\dot X=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ 0 & & & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=[(b_0-b_na_0),\ (b_1-b_na_1),\ \cdots,\ (b_{n-1}-b_na_{n-1})]x+b_nu$$

Linear Algebra　BUCT

求解特定一阶线性常微分方程组

例题：求解一阶线性常系数微分方程组
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 \end{cases}$$

已知 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，令 $\dfrac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$，则微分方程写为 $\dfrac{dx}{dt} = Ax$，利用 A 可对角化化简方程组

Linear Algebra BUCT

矩阵的 LU 分解与方程组

如果线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 有三角分解 $A = LU$，则 $Ax = b$ 同解与如下两个以三角矩阵为系数矩阵的线性方程组

$$Ly = b, Ux = y$$

例题：求解线性方程组 $Ax = b$，其中 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

先求 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，然后分别回代求解

Linear Algebra BUCT

用分析的方法看最小二乘问题

定义： 设 $f(X)$ 是以 $X=(x_{ij})_{m\times n}$ 为自变量的 mn 元函数，且 $\dfrac{\partial f}{\partial x_{ij}}$ 都存在，

规定 f 对 X 的导数

$$\frac{df}{dX}=\left(\frac{df}{dx_{ij}}\right)_{m\times n}=\begin{bmatrix}\dfrac{df}{dx_{11}} & \cdots & \dfrac{df}{dx_{1n}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{df}{dx_{m1}} & \cdots & \dfrac{df}{dx_{mn}}\end{bmatrix}.$$

特别地，以 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$ 为自变量的函数 $f(x)$ 的导数 $\dfrac{df}{dx}=\left(\dfrac{df}{\partial\xi_1},\dfrac{df}{\partial\xi_2},\cdots,\dfrac{df}{\partial\xi_n}\right)^T$

称为对向量变量的导数，也称为梯度向量，记为 $\operatorname{grad} f$.

用分析的方法看最小二乘问题

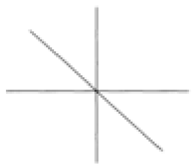
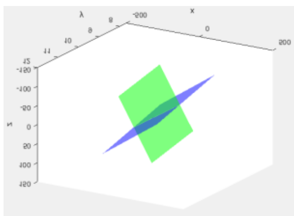
设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}, b\in\mathbb{C}^n$，当线性方程组 $Ax=b$ 无解时，此时希望找出这样的 $x_0\in\mathbb{C}^n$，使得 $\|Ax-b\|_2$ 达到最小，即

$$\|Ax_0-b\|_2=\min_{x\in\mathbb{C}^n}\|Ax-b\|_2.$$

称这个问题为最小二乘问题，称 x_0 为矛盾方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解.

定理： 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}, b\in\mathbb{R}^m$. 若 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 是 $Ax=b$ 的最小二乘解，则 x_0 是方程组 $A^TAx=A^Tb$ 的解，称此方程组为 $Ax=b$ 的法方程.

8. 部分高阶性讨论题列表

序号	主题	章节	讨论内容
1	关于矩阵的逆	1.4	（1）教材上在讲逆矩阵时，要求矩阵必须是方阵？为什么？ （2）你有想过可以定义长方阵的逆矩阵吗？ 引导学生查阅关于广义逆矩阵的相关资料，感兴趣的同学也可以进入学堂在线我们的《矩阵论及其应用》MOOC 课程了解。网址： https://www.xuetangx.com/course/SDDXP0854003501/7770016
2	行列式在三维空间中的应用	2.3	行列式的几何意义是什么呢？查阅文献学习平面组,齐次坐标的概念，通过行列式判断平面的关系。
3.	线性方程组解的几何含义	3.2	（1）二元一次线性方程组的解表示：二维空间（即平面）中一些直线的交  如图表示方程组 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ 有唯一解（0，0），即原点。 （2）三元一次方程组的解表示：三维空间中一些平面的交  如图表示方程组：

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>$$\begin{cases} 3x+5y+4z=60 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$$ 的解，解空间为什么？解有什么特点？
（3）对于 m 个 n 元一次线性方程构成的方程组，每个方程可看作是 n 维空间中余维数为 1 的子空间，成为“超平面”（hyperplane），该方程组的解可看作含有 m 个超平面的构形（arrangement）的中心，若解存在，则对应于中心构形；不存在，则对应于非中心构形。
思考：将 m 个 n 元一次线性方程构成的方程组看作如上的超平面构形，那么任意超平面的交对应于方程组的什么呢？该交点能找出多少个？与方程组的解（有解情况下）有什么联系呢？</td></tr>
<tr><td>5</td><td>秩</td><td>3.3 和 4.3</td><td>你想了解矩阵的秩与人脸识别或者数据降维的关系吗？请查阅文献了解 123</td></tr>
<tr><td>6</td><td>特征值与特征向量</td><td>6.3</td><td>1. 如何从几何的观点理解矩阵的特征值和特征向量，请查阅知乎或者百度上的博客或查阅文献，谈谈你的理解。
2. 有人说，陶哲轩与三位物理学家提出特征向量求解新定理，可能改写了教科书，感兴趣的同学可以查阅热搜哈</td></tr>
<tr><td>7</td><td>二次型的正负惯性指数的含义</td><td>7.3</td><td>讨论二次曲面的类型与二次型正负惯性指数的关系
<table>
<tr><td>正惯性指数 / 负惯性指数</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>0</td><td>无意义</td><td>两个平面</td><td>椭圆柱面</td><td>椭球面</td></tr>
<tr><td>1</td><td>无意义</td><td>双曲柱面</td><td>单叶双曲面</td><td>/</td></tr>
<tr><td>2</td><td>无意义</td><td>双叶双曲面</td><td>/</td><td>/</td></tr>
<tr><td>3</td><td>无意义</td><td>/</td><td>/</td><td>/</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>8</td><td>二次型到高阶张量</td><td>7.2</td><td>线性代数里只讨论到二次型，请同学们小组讨论，可以类似地描述三次型，四次型，甚至 n 次型吗？</td></tr>
</table>

10. 在国内重要教学会议上的报告清单和部分截图.

（1）**申报人之一崔丽鸿教授**，作为我校《工程数学》课群负责人，近 2 年应邀在重要教育教学会议上报告 4 场，介绍《线性代数》等工程数学课程教学改革情况，得到同行的赞赏。列出代表性如下：

1）**2019 年 11 月 30 日-12 月 1 日，报告题目**：MOOC 与智慧教学下的《线性代数》课程教学新模式探索与实践，**会议名称**：2019 新时代高校数学教学改革与创新研讨会，由教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会、数学类专业教学指导委员会、统计学类专业教学指导委员会、高等学校大学数学教学研究与发展中心和高等教育出版社共同主办，浙江理工大学承办。来自全国 280 余所高校、900 余位专家教师代表参加了会议。

2）**2020 年 6 月 7 日腾讯会议，报告题目：战疫情下的线上教学和测试---以线性代数课程为例，会议主题**：“停课不停教，不停学”思想指导下，线上教学效果及如何开展线上测试的思路和实践，北京高校数学教育研究发展中心主办。来自北京高校的 200 余位专家教师代表参加了会议。

3）**2020 年 11 月 24 日，报告题目：线性代数课程思政探索和实践，**北京化大学数理学院。

4）**2019 年 6 月 30 日，报告题目**：探讨 MOOC 与智慧教学背景下的大学数学课程混合式教学，**会议主题**：数学学科发展与教师能力提升研讨会，2019 年 6 月 30，**北京化工大学主办。**

4）**2018 年 10 月 28 日，报告题目**：新工科背景下《线性代数》在线课程建设的探究与实践，**会议主题**：2018 年北京高校新工科背景下数理化基础课程教学研讨会，北京化工大学主办。

(2）**申报人之一姜广峰教授，**作为我校《数理学院院长》、《线性代数》主讲教师、《教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会》、《北京高校数学教育研究发展中心》，近几年应邀在各种具有重大影响力的教育教学会议上报告 10 余场，介绍我校《线性代数》等大学数学类课程的教学改革成果，得到同行的赞赏。目前我校《线性代数》课程，在北京市和全国其他院校具有较好的影响力和示范作用，在北京市高等教育研究和相应的课程建设等方面起到辐射作用。列出代表性会议报告如下：

1）2017 年 8 月 16 日 高等学校大学数学课程教学指导委员会会议，应邀大会报告：**浅谈新工科背景下大学数学基础课程的教学改革。**

2）2017 年 8 月 24 日，2017 年高校数学教学暑期培训暨第二届华北赛区微课比赛颁奖会，应邀大会报告：**浅谈新工科背景下大学数学基础课程的教学改革。**

3）2018 年 5 月 11-12 日，在高等教育出版社主办的“融合创新 加快一流课程与教材建设研讨会”（郑州）上应邀做报告“面向新工科的大学数学课程教学改革与建设——**课程教学改革与建设-以数学为例**”。

4）2019 年 6 月 22 日，会议名称：大学数学课程教学研讨暨高等学校大学数学教学研究与发展中心成立十周年总结会议，地点：西安交通大学，报告题目：**关于课程质量评价的思考 ——以大学数学课程为例。**

5）2019 年 9 月 14 至 16 日，会议名称：2018-2022 教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会全体委员会议，报告题目：**高校大学数学课程教学质量指数研究进展.**

6）2019年10月27日，会议名称：2019年中国农业大学理学院教学会议（北京），报告题目：**如何打造自己的金课。**

7）2019年11月2日，会议名称：2019北京地区高校一流课程与教材建设研讨会，主办：北京市教委高教处 承办：北京服装学院 高等教育出版社，地点：北京服装学院，报告题目：主题报告1： **新工科背景下的金课建设。**

8）2019年11月9日，会议名称：北京高校数学教育发展研究中心研讨会暨中国高等教育学会教育数学专业委员会首届师资培训会，主办：北京航空航天大学数学科学学院，报告题目：**如何打造自己的金课。**

9）2019年11月28日，对外经济贸易大学统计学院邀请报告：**浅谈新时代大学数学金课建设。**

10）2020年3月，北京建筑大学邀请报告，题目：**关于教育教学研究课题申报的思考。**

11. 参加教学能力提升和课程思政学习培训的证书

高等学校教师培训证书

No：GXSZ083257

北京化工大学 崔丽鸿 同志：

经学校推荐，于2021年11月24日至2021年11月26日，参加全国高校教师网络培训中心主办的高校教师课程思政教学能力培训。培训学时16学时，达到培训要求。

特发此证。

教育部全国高校教师网络培训中心

2021年11月27日

学堂在线 xuetangx.com

培训证书

Training Certificate

北京化工大学 崔丽鸿 老师：

祝贺您在学堂在线组织举办的高校师资培训系列活动中，顺利完成学习，并取得优异成绩。

培训课程：全国高校课程思政教学设计与课程思政建设专题研修班

培训时间：2020年7月1日-2020年7月4日

完成学时：14学时

发证日期 | Issue Date：2020-07-04

证书编码 | Certificate No.：PXC202002916

学堂在线
xuetangx.com

培训证书

Training Certificate

北京化工大学 赵中华 老师：

祝贺您在学堂在线组织举办的高校师资培训系列活动中，顺利完成学习，并取得优异成绩。

培训课程：全国高校课程思政教学设计与课程思政建设专题研修班

培训时间：2020年7月1日-2020年7月4日

完成学时：14学时

发证日期 | Issue Date：2020-07-04

证书编号 | Certificate No.：PXC202002955

XCMI

学堂在线认证慕课教师

XuetangX Certified MOOC Instructor

注册编号： 2017M001016

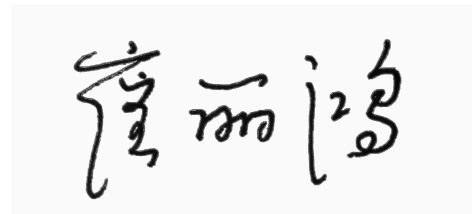
单位名称： 北京化工大学

发证日期： 2017年04月23日

崔丽鸿 于2017年04月22日至2017年04月23日在全国高等院校慕课与智慧教学实践与应用实战班中完成培训课程并通过实践考核，获得学堂在线认证慕课教师资格，特发此证。

证书持有者同时获得，所授MOOC上线教育部在线教育研究中心研究交流和成果应用的官方平台学堂在线、全国工程硕士专业学位教育指导委员会建设的全国工程专业学位研究生在线课程公共平台，初审免检资格。

课程负责人签字：



作者 崔丽鸿

线性代数

- **课程信息**
  - 线性代数A，56学时
  - 线性代数B，48学时
  - 教材：线性代数，姜广峰 崔丽鸿主编，高等教育出版社
  - 教辅：线性代数导学备考一书通，崔丽鸿，姜广峰，化学工业出版社
  - MOOC：https://www.icourse163.org/线性代数典型习题讲解，北京化工大学，崔丽鸿，姜广峰等
  - 北化在线：https://course-proxy2.buct.edu.cn/meol/index.do，线性代数，北京化工大学
  - 参考资源
    - 其他学校MOOC推荐： 黄廷祝（电子科技大学），线性代数与空间解析几何；靳全勤(同济大学)， 线性代数； 陈建龙（东南大学），线性代数； 学堂在线：杨晶(清华大学): 简明线性代数
- **教学内容**
  - 第1章 矩阵及其运算
  - 第2章 行列式
  - 第3章 线性方程组解的判定及其求解
  - 第4章 n维向量与向量组的线性相关性
  - 第5章 线性方程组解的性质和结构
  - 第6章 矩阵的特征值和相似对角化
  - 第7章 二次型
  - 第8章 线性空间与线性变换
- **教学方式**
  - 线上线下混合式
    - 教学形式上：传统面对面教学与网络教学的结合
    - 教学技术上：基于Web技术，结合视频、音频、文本、图形、动画等多种多媒体技术；
    - 教学手段上：传统教学手段与信息技术手段的结合
    - 教学方法上：因材施教，有的放矢，一法为主，多元混合，充分发挥教师的主导作用与学生的主体地位，以达到最佳的教学效果
    - 教学评价上：过程评价、结果评价等多种评价方式的结合
  - 依托平台
    - 实体课堂
    - 北化在线
    - 爱课程
    - 企业微信直播（腾讯会议或其它备选）
- **成绩评定方案**
  - 签到（占9%）和自我评价（占1%）
  - 北化在线测验占15%
  - 课后作业占15%
  - 爱课程《线性代数典型习题讲解》MOOC单元测验下的阶段性测验占10%
  - 期末考试50%
- **什么是线性代数?**
  - 什么是线性Linear？
    - 在中学里，“一次方程”、“一次函数”，就是“线性方程”、“线性函数”.就线性函数而言，它的代数意义是：可加性、比例性（k为数值时，叫数乘性）
  - 什么是代数Algebra?
    - 简单的说，代数就是用字母代替数进行运算，这里字母是抽象的对象，可以是变量、向量、复数、矩阵、群、环、域、算子等等.
  - 讨论线性方程及线性运算的代数就叫做线性代数
- **为什么要学习线性代数？**
  - 瑞典数学家Lars Garding在其名著Encounter with Mathematics中说：“如果不熟悉线性代数的概念，要去学习自然科学，现在看来就和文盲差不多。”
  - 高等学校重要的公共基础课
  - 考研必考数学科目
  - 大数据人工智能的基础，各行各业的有力的支撑
- **线性代数有什么特点？**
  - 概念多、公式多、式子大、计算大、符号繁、关系杂......
  - 抽象美、对称美、规律美、逻辑美、简洁美、算法美......
  - 训练思维、同时能让你的脑细胞翩翩起舞
- **如何学习线性代数？**
  - 注重课前课中课后三环节的安排和效率
  - 重视基本概念、基本原理、基本方法，循序渐进
  - 勤思多练，敢于提问，参与互动，积极讨论
  - 按时完成作业、及时查漏补缺、注重梳理总结
- **崔丽鸿老师的祝语**
  - 对自己
    - 对自己：“三尺讲台责任重，慈母严师待学生，数学面纱任我揭，数学魅力任我显，蜡炬成灰泪始干，辛勤耕耘乐其中”。
  - 对莘莘学子
    - 对学生：“大学数学真美妙，数学美味细品尝，待到用时不惆怅，四年时光当珍惜，身健体魄快乐学，独领风骚皆自豪“。

线性代数

主编 姜广峰 崔丽鸿

作者 崔丽鸿

线性代数章节目录和作业布置

- **第1章 矩阵及其运算**
  - 1.1 矩阵的概念
  - 1.2矩阵的运算　习题1.2　2（2）（4）；3（1）（3）；6（1）（3）（5）；7；9（2）（3）
  - 1.3 逆矩阵　习题1.3　2；3；5
  - 1.4 分块矩阵　习题1.4　1（1）（3）（5）；3；4
  - 1.5矩阵的初等变换与初等矩阵　习题1.5　2（3）；4
  - 1.6用初等变换求逆矩阵　习题1.6　1（2）（7）；2（1）（2）（3）；3
  - 1.7矩阵的应用及其计算软件举例
- **第2章 行列式**
  - 2.1行列式的定义　习题2.1　2 (1); 4; 6
  - 2.2行列式的性质　习题2.2　2（1）（2）；3（1）（3）
  - 2.3行列式按行（列）展开　习题2.3　3；4（2）（4）；5（1）（3）（5）
  - 2.4行列式与克拉默法则　习题2.4　1（2）
  - 2.5行列式与方阵　习题2.5　1; 2; 3; 5（2）（4）; 6
  - 2.6行列式的应用及其计算软件举例
- **第3章 线性方程组解的判定及其求解**
  - 3.1一般线性方程组的基本概念及其矩阵表示
  - 3.2线性方程组的求解与矩阵的初等行变换　习题3.3　2（1）；3（2）；4
  - 3.3矩阵的秩
  - 3.4线性方程组有解的判定与求解　习题3.4　3（1）；4（2）；6
  - 3.5线性方程组的应用及其计算软件举例
- **第4章 n维向量与向量组的线性相关性**
  - 4.1n维向量的基本概念
  - 4.2向量组的线性关系　习题4.2　第3（1）；5；8；9
  - 4.3 向量组的秩　习题4.3　3（2）；5；9；10
  - 4.4 n维向量空间　习题4.4　2；3
  - 4.5向量的内积与正交向量组　习题4.5　4；9
  - 4.6向量的应用及其计算软件举例
- **第5章 线性方程组解的性质和解的结构**
  - 5.1 线性方程组解的等价命题　习题5.1　1
  - 5.2齐次线性方程组解的结构　习题5.2　4（1）；5
  - 5.3 非齐次线性方程组解的结构　习题5.3　5（1）；6
- **第6章 矩阵的特征值和相似对角化**
  - 6.1特征值与特征向量　习题6.1　4（1）；5
  - 6.2 相似矩阵　习题6.2　2, 9，13
  - 6.3 实对称矩阵的对角化　习题6.3　3, 5，7（1）
  - 6.4矩阵特征值和相似对角化应用及其计算软件举例
  - 搭建体系的三种思路
- **第7章 二次型**
  - 7.1 二次型与对称矩阵
  - 7.2 化二次型为标准形　习题7.2　1（2）；2；3（2）
  - 7.3 二次型的不变量和惟一性　习题7.3　4；5
  - 7.4 二次型的正定性　习题7.4　1（3）；2（2）；4；6
  - 7.5二次型应用及其及其计算软件举例
- ***第8章 线性空间与线性变换（本章讲授根据课时调整）**
  - 8.1线性空间及子空间　习题8.1　1（2）；2（1）；5
  - 8.2基与向量的坐标　习题8.2　3；4；5；8
  - 8.3 线性变换　习题8.3　2（1）（3）；3；4；5
  - 8.4 线性变换的矩阵表示　习题8.4　1；3；5

线性代数 A（56 学时）教案

第（1）次课 崔丽鸿

教学章节	第一章第 1.1、1.2 节	学时	2 学时
教材 和参考书	1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书） 2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书） 3. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考） 4. Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra，Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考） 5. Jim Hefferon，Linear Algebra，available for free online，2014. （教学参考） 6. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008.（教学参考） 7. 刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）		

1. 教学目的： 了解矩阵的概念；掌握矩阵的运算，通过思政案例让学生理解矩阵更深层次的含义，培养学生逻辑推理能力及抽象思维能力；并培养家国情怀、树立文化自信，初步培养用矩阵及数学软件解决实际问题的能力；感受主动参与、合作交流的乐趣，获得积极的情感体验；

2. 教学重点：矩阵的概念和矩阵的线性运算；

3. 教学难点：矩阵概念的深层次含义和矩阵的线性运算。

1. 教学内容：矩阵；矩阵的线性运算；

2. 时间安排：2 学时；

3. 教学方法：讲授与讨论相结合；

4. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc 平台讨论+北化在线测试。

教学设计：

课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析，培养学生自主学习能力，训练独立思考的素质）：

1. 观看中国大学慕课平台线性代数典型习题讲解中的课程导学，初步了解线性代数；

2. 复习整理高中学过的有关线性代数的相关知识点；

3. 在网上查阅矩阵的历史，探寻矩阵的起源，课上分享；

4. 你所了解的矩阵是什么样子的？生活中你见过矩阵吗？

5. 了解 MATLAB 软件，学习简单的 MATLAB 语句。

课中检测，并探讨重点、难点知识点（将启发式、互动式和探究式等多种教学方法适时融入教学过程，提高学生课堂学习的深度参与度，培养逻辑思维能力，思辨能力等）：

1. 在案例分析引入矩阵定义之后，雨课堂完成对矩阵的应用习题；

2. 多种形式的课堂讨论：

①启发式提问引起课堂讨论：讨论特殊矩阵在不同应用中的作用，从而深入理解特殊矩阵的含义。

②教师举例引起课堂讨论：举出矩阵应用案例，说明矩阵的作用，深层次含义，由此引发学生结合所学矩阵知识延伸学习，改善学生的学习方法。

③提问预习结果：矩阵的线性运算是什么？他们满足什么运算性质？并加以点评。老师起引导作用，主要锻炼同学利用所学知识分析问题解决问题的能力。

3. 翻转课堂：

根据课前布置的任务，翻转课堂，由学生分享矩阵的起源。

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况，帮助学生进一步深入理解掌握知识点，培养解决复杂问题的能力，训练学以致用的素质）

1. 布置书后作业，北化在线平台提交；

2. 在 MOOC 平台讨论区，展开内容讨论，并及时评价：

3. 在北化在线平台完成课后测试；

4. 在微信群、企业微信群、mooc 平台、线下随时回答解决同学的问题；

基本内容	教学反思
第一节 矩阵 **一、 案例导引：** 由 2 个实际问题导入矩阵的概念，让学生意识到矩阵与我们的实际生活及工作息息相关，并培养家国情怀。 引例 1：某宿舍甲、乙、丙、丁四位同学把星期一早、中、晚三餐的餐费花销记	**前测：** 你还能想到什么实

录在一张表中

表 1.1 星期一餐费花销表

餐 人	早	中	晚
甲	2	6	8
乙	2	7	7
丙	2	8	6
丁	3	8	9

那么表 1.1 可以简写为 4 行 3 列的数表 $\boldsymbol{A}_1$： $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2 & 6 & 8\\ 2 & 7 & 7\\ 2 & 8 & 6\\ 3 & 8 & 9\end{pmatrix}$

引例 2：下面是武汉抗击新冠肺炎疫情的重大事件时刻表，可以转换成如下数表

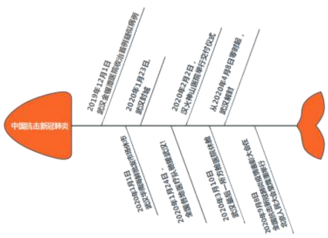


表 1.2 武汉抗击新冠疫情重大事件时刻表

2019	12	1
2020	1	1
2020	1	23
2020	1	24
2020	2	2
2020	3	10
2020	4	8
2020	9	8

二、 浸入式学习与价值引领

1. 矩阵的定义

际问题可以用数表表达吗？培养学生思考解决问题的方法及抽象思维。

思政元素

这张震撼人心的时间表，让我们感受到家国情怀的磅礴伟力。

概念讲解

称 m 行、n 列的数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$

为 $m\times n$ 矩阵，或简称为矩阵；表示为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

或简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，或 $A=(a_{ij})$ 或 $A_{m\times n}$；其中 a_{ij} 表示 A 中第 i 行，第 j 列的元素。

矩阵的直观定义是数表，矩阵还有更深层次含义，矩阵是数据结构。

看下某宿舍同学设计的防疫身份标识码。

请同学们扫描屏幕上的二维码，看看，在手机上得到了什么？

能力培养

通过例子，培养学生学习兴趣，解决实际问题能力，为专业应用打下基础。

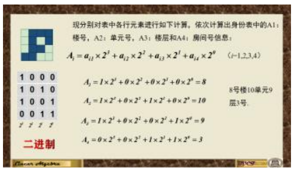
如何将这幅图转换成数表，数表中的数会是什么？

图像处理过程 1.ps 做像素图像（原始图像）

2.用黑白转换算法处理为黑白的图像

3.建立一个二维 list，遍历图像中每一个像素，如果该像素为黑色则记为 0，白色则记为 1

1. 二进制描述住宿信息



能力培养

矩阵的实际应用，初步培养学生用矩阵解决实际问题的能

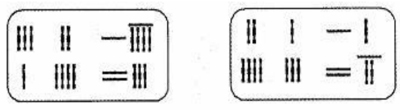
将表中信息转换成 10 进制数据

$A_i = a_{i1}\times 2^3 + a_{i2}\times 2^2 + a_{i3}\times 2^1 + a_{i4}\times 2^0$ （i=1,2,3,4）

应用举例：某三款手机在某四个商家的网上单位售价（单位千元）矩阵，常

称成为**价格矩阵**；北京在上午和下午两个时段到其他6个城市的高铁信息矩阵，常称为**通路矩阵**；对于学生成绩登记表、公司员工业绩表、企业产值统计表、工厂产量统计表等都可以用矩阵表达，常称这样的矩阵为**统计矩阵**。

【例 1.1】：矩阵起源于中国的《九章算术 》，如下是《九章算术》中的矩阵，用筹算表示数，采用纵式摆法，图（1）中的矩阵为



图(1)　　　　图(2)

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 19\\ 1 & 4 & 23\end{pmatrix}$$

图（2）中的矩阵请同学们自己完成，雨课堂提交。

2. 特殊矩阵

（1）n 阶方阵： $n\times n$ 矩阵

（2）行矩阵 ：$1\times n$ 矩阵（以后又可叫做行向量），记为

$$A=(a_1,a_{2,},\cdots,a_n)$$

（3）列矩阵 ：$m\times 1$ 矩阵（以后又可叫做列向量），记为

$$B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

（4）零矩阵 ：由零组成的矩阵称为零矩阵．零矩阵有很多,例如

$$\boldsymbol{O}_{1\times1}=(0)，\boldsymbol{O}_{1\times2}=(0\quad 0)，\boldsymbol{O}_{2\times1}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}，\boldsymbol{O}_{3\times4}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

课堂互动：零矩阵唯一吗？为什么？想想零矩阵和数字零的地位会一样吗？

（5）对角阵 ：若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的非对角元 $a_{ij}=0$（$i\neq j$），则称 $\boldsymbol{A}$ 为（n 阶）对角矩阵，记为

力和逻辑推理能力。

翻转课堂

矩阵的起源

思政元素

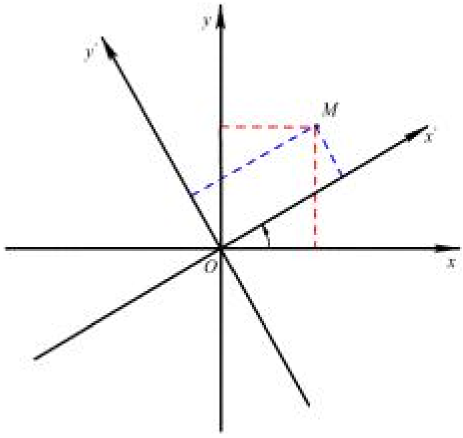
雨课堂实现课堂互动教学环节，树立文化自信。

能力培养

培养学生思辨能力和逻辑思维能力。

$$\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}\left(a_{11},\quad a_{22},\quad \ldots\quad ,a_{nn}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ （6）数量矩阵：若 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}\left(a_{11},\quad a_{22},\quad \ldots\quad ,a_{nn}\right)$ 中对角线上元素相等，即 $a_{ii}=k$ （$i=1,2,\ldots,n$），则称 $\boldsymbol{A}$ 为数量矩阵. （7）单位阵 ：对角线元素为 1，其余元素为 0 的方阵，记为 $$E=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$ （8）三角矩阵：若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中 a_{ij}=0 （$i>j$），则称 $\boldsymbol{A}$ 为上三角矩阵. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中 a_{ij}=0 （$i<j$），则称 $\boldsymbol{A}$ 为下三角矩阵. $$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ （9）行阶梯形矩阵 具有下列特征的矩阵称为行阶梯形矩阵. ①零行（即元素全为零的行）位于非零行的下方； ②各非零行的首非零元（即左起第一个不为零的元素）都在其上一行非零首元右边的列中. 下列矩阵 $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$	**知识讲解** 矩阵中的“0”和“1”，体会他们在矩阵中的地位及应用。 **能力培养** 由简入繁，由具体到抽象，帮助学生理解抽象概念。

都是行阶梯形矩阵. （10）简化行阶梯形矩阵 具有下列特征的矩阵称为简化行阶梯形矩阵. ①是行阶梯形矩阵； ②各非零行的首非零元都是 1； ③每个首非零元所在列的其余元均为 0. 下列矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 都是简化行阶梯形矩阵. **3. 线性变换的系数矩阵** 线性变换的定义：设变量 $y_1, y_2, ..., y_m$ 能用变量 $x_1, x_2, ..., x_n$ 线性表示，即 $\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \end{cases}$ 这里 $a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$ 为常数。这种从变量 $x_1, x_2, ..., x_n$ 到变量 $y_1, y_2, ..., y_m$ 的变换称为线性变换。 线性变换由 m 个 n 元函数组成，每个函数都是变量的一次幂，故而称之为线性变换。 上式的系数可构成一个 $m \times n$ 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n} = (a_{ij})$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称之为线性变换的系数矩阵。 线性变换和系数矩阵是一一对应的。	**能力培养** 介绍矩阵的深层次含义，帮助学生理解矩阵的定义，培养抽象思维能力。 **概念理解** 化抽象为具体，帮助学生理解矩阵是变换。



如,直角坐标系的旋转变换（变量(x,y)到变量(x',y')的变换）

$$\begin{cases} x' = \cos\theta x + \sin\theta y \\ y' = -\sin\theta x + \cos\theta y \end{cases}$$

的系数矩阵为 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. 图形及图形的变换都可以用矩阵来描述。

恒等变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \quad\vdots \\ y_m = x_m \end{cases}$$

的系数矩阵为

例. $E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

同样，齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

与系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，也是一一对应的.

能力培养

化抽象为具体，培养学生抽象思维能力。

知识点内在联系探讨：

矩阵与方程组一一对应，第三章将用矩阵来求方程组的解。

非齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

与增广矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ 也是一一对应的。

思考：矩阵与方程组一一对应，那么方程组求解和矩阵会有什么关系呢？

第二节　　矩阵的运算

一、案例导引：

结合实际应用，考虑矩阵的某种运算是很自然的．首先给出矩阵相等的概念．行数和列数分别相等的矩阵称为同型矩阵．

如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ 对应位置的元素相等 $a_{ij}=b_{ij}$（$i = 1,2,\ldots,m$； $j = 1,2,\ldots,n$），则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$．

如果引例 1 中所说宿舍同学星期一与星期二餐费花销分别为

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 2 & 7 & 7 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 9 & 9 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

那么星期一与星期二总共餐费花销还是一个矩阵，其中的元素就是 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 这两个矩阵对应位置的元素相加，即

$$\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 13 & 15 \\ 5 & 15 & 14 \\ 4 & 17 & 15 \\ 6 & 14 & 17 \end{pmatrix}.$$

二、浸入式学习与价值引领

前测：

$\boldsymbol{A} = (1\,,\,2)$ 和 $\boldsymbol{B} = (1\,,\,2)^T$ 相等吗？

能力培养

帮助学生理解矩阵，学会用数学工具解决实际问题。

能力培养

让学生独立完成 $\boldsymbol{A}_1$+$\boldsymbol{A}_2$ 的计

1. **矩阵的加法：**

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$， $B=(b_{ij})_{m\times n}$，都是 $m\times n$ 矩阵，则加法定义为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

显然，

① $A+B=B+A$，② $(A+B)+C=A+(B+A)$

【注】只有同型矩阵才能相加，同型矩阵的和与原来矩阵同型．对矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{mn}$ 如果我们定义它的负矩阵为 $-\boldsymbol{A}=\left(-a_{ij}\right)_{mn}$，显然有 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$．

因此，可以定义 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差，即矩阵的减法：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

2. **数乘**

在引例 1 中，如果每位同学都在星期一改善伙食，同时都把三餐费用提高了 1.2 倍，那么提高后的餐费花销表仍然可以用矩阵表示，这个矩阵就是 $\boldsymbol{A}_1$ 中每个元素都乘以 1.2，即

$$1.2\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 1.2\times 2 & 1.2\times 6 & 1.2\times 8 \\ 1.2\times 2 & 1.2\times 7 & 1.2\times 7 \\ 1.2\times 2 & 1.2\times 8 & 1.2\times 6 \\ 1.2\times 3 & 1.2\times 8 & 1.2\times 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2.4 & 7.2 & 9.6 \\ 2.4 & 8.4 & 8.4 \\ 2.4 & 9.6 & 7.2 \\ 3.6 & 9.6 & 10.8 \end{pmatrix},$$

数与矩阵相乘的概念：

设 λ 是数，$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则数乘定义为

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

显然

① $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu)A$，②$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$，③$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

算，培养学生逻辑思维能力。

能力培养

由负矩阵和矩阵加法定义矩阵减法，培养逻辑思维能力和思辨能力。

能力培养

案例引入，培养学生分析问题能力和解决实际问题能力。

从具体到抽象，帮助

矩阵的加法与数乘统称为矩阵的线性运算．设 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 都是同型矩阵，k 、l 是数，容易证明，线性运算满足下面八条运算规律：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；(2) $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$；(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$；

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$；(5) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；(6) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$；

(7) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；(8) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$．

3. 乘法

在引例 1 中，如果甲、乙、丙、丁四位同学在 2013 年 6 月的第二周都开始提高餐费，与第一周相比，星期一提高的餐费是：早餐都提高了 a_1 倍，午餐都提高了 b_1 倍，晚餐都提高了 c_1 倍，星期二提高的餐费是：早餐都提高了 a_2 倍，午餐都提高了 b_2 倍，晚餐都提高了倍 c_2．则我们容易得到：

甲同学周一的餐费为 $2a_1+6b_1+8c_1$，周二的餐费为 $2a_2+6b_2+8c_2$，其他三位同学的餐费也可以类似得到，于是这四位同学提高餐费之后的花销记录可以用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}2&6&8\\2&7&7\\2&8&6\\3&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\\c_1&c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a_1+6b_1+8c_1&2a_2+6b_2+8c_2\\2a_1+7b_1+7c_1&2a_2+7b_2+7c_2\\2a_1+8b_1+6c_1&2a_2+8b_2+6c_2\\3a_1+8b_1+9c_1&3a_2+8b_2+9c_2\end{pmatrix}$$

其中的 $3a_2+8b_2+9c_2$ 表示丁同学在周二的餐费花销．

注：两个矩阵相乘要求前一个矩阵的列数等于后一个矩阵的行数；乘积矩阵的行数为前一个矩阵的行数，列数为后一个矩阵的列数；乘积矩阵的第 i 行，第 j 列元素为前一个矩阵的第 i 行元素与后一个矩阵的第 j 行元素对应相乘再相加。

【例 1.2】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\9&8&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&9\\1&1&0\end{pmatrix}$． 求 $\boldsymbol{AB}$．

【解】按定义 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&1&1\\9&8&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&9\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6&9\\22&31&72\end{pmatrix}$．

但是，$\boldsymbol{BA}$ 无定义．

学生理解概念

概念梳理：因为加法与数乘运算满足这 8 条性质，所以称为矩阵的线性运算。

难点精讲：矩阵乘法是本节难点，案例引入，计算过程动画演示，让学生掌握乘法运算规则。培养学生的计算能力。

能力培养学生计算 $\boldsymbol{BA}$，让学生说明无定义理由（引导学生的逻辑思维能力）

【例 1.3】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.	
【解】$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}$.	
$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n$.	
这里，$\boldsymbol{BA}$ 严格地说是一个 1 阶方阵 $\left(b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n\right)$. 但是，我们经常把 1 阶方阵与其中的数等同对待.	
【例 1.4】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.	
【解】$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\2 & -2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.	
从以上几个例题看出： （1）$AB \neq BA$，（不满足交换律） （2）$A\neq O$，$B\neq O$，但却有 $BA=O$。 下列性质显然成立： （1）结合律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$， 特别地，对于数 k 有 $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=k(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$； （2）分配律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AD}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{F})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{FB}$. （3）矩阵乘法没有交换律，一般地，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的； （4）矩阵乘法没有消去律，一般地，由 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 和 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 推不出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.	**能力培养** 提问启发学生总结乘法运算律，（引导学生的自主学习能力）
【课堂小测】若 A 为 $m\times n$ 矩阵，E 是 m 阶单位阵，则 $EA=A$；若 E 是 n 阶单位阵，则 $AE=A$； 【例 1.5】线性变换的矩阵表示：	**学情检测** 通过【课堂

设 $\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \end{cases}$ ，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

则 $y = Ax$

【例 1.6】线性方程组的矩阵表示：

《九章算术·方程》 今有：
上禾三秉，中禾一秉，下禾二秉，实四十斗；
上禾二秉，中禾一秉，下禾三秉，实三十一斗；
上禾一秉，中禾三秉，下禾二秉，实二十四斗；
问 上、中、下 禾 实一秉各几何?
【解】 设上禾实一秉 x 斗，
中禾实一秉 y 斗，
下禾实一秉 z 斗，
则有三元一次线性方程组

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 40 \\ 2x + y + 3z = 31 \\ x + 3y + 2z = 24 \end{cases} \Longrightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 40 \\ 2 & 1 & 3 & 31 \\ 1 & 3 & 2 & 24 \end{pmatrix}$$

一般情况：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则 $Ax = b$

小测】了解学生对乘法运算的掌握情况

思政元素

雨课堂实现课堂互动教学环节，树立文化自信。

4. 方阵的幂与多项式 方阵的幂　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，k 为非负整数．定义 $\boldsymbol{A}$ 的幂 $$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}_n,\quad \boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}\ (k=1,2,\dots).$$ 对于非负整数 k,l 有 （1）$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$； （2）$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$． 一般地，$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$． 定义（方阵的多项式）设有一个 x 的 k 次多项式 $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots a_1x+a_0,\ \ a_k\neq 0$． 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则称 $f(\boldsymbol{A})=a_k\boldsymbol{A}^k+a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次多项式． 【例 1.7】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$f(x)=x^3+2x^2+x+2$，则 $$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}_n.$$ 特别地，设 $n=3$，且 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&0&a^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$． 因此 $f(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}^3+2\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}_3$ $$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&0&a^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&a&b+2a^2\\0&2&a\\0&0&2\end{pmatrix}.$$ 若 $f(x),g(x)$ 是 x 的两个多项式，则有 $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})$． 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，容易验证二项式展开公式 $$(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E}_n)^k=\boldsymbol{A}^k+\mathrm{C}_k^1\lambda\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+\mathrm{C}_k^{k-1}\lambda^{k-1}\boldsymbol{A}^1+\mathrm{C}_k^k\lambda^k\boldsymbol{E}_n=\sum_{j=0}^{k}\mathrm{C}_k^j\lambda^j\boldsymbol{A}^{k-j},$$	**课堂互动** 为什么 $(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$？矩阵乘法不具有交换律（学以致用） **能力培养** 提问为什么？

其中λ是数，C_k^j是从k个元素中取j个元的组合数．	培养学生分析问题能力及逻辑思维能力。

【例 1.8】求 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的n次幂$\boldsymbol{A}^n$．

【解】显然，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{B}$，其中$\boldsymbol{B}$同例 1．7 中的矩阵$\boldsymbol{B}$．根据例 1．7 中的计算和二项展开公式有

$$\boldsymbol{A}^n=\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}_3\right)^n=C_n^2\boldsymbol{B}^2+C_n^1\boldsymbol{B}^1+\boldsymbol{E}_3$$

$$=C_n^2\begin{pmatrix}0&0&a^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+C_n^1\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&na&nb+\dfrac{n(n-1)}{2}a^2\\0&1&na\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

5. 转置

设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$，记 $A^T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_1n&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$

则称A^T是A的转置矩阵。

对称矩阵的定义:若矩阵A满足$A^T=A$（即$a_{ij}=a_{ji}$）,则称A是对称阵

能力培养

培养学生分析问题能力和思辨能力

显然，

①　$\left(A^T\right)^T=A$，②　$(A+B)^T=A^T+B^T$，③　$(\lambda A)^T=\lambda A^T$，④　$(AB)^T=B^TA^T$。

下面只证明④

设$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)_{n\times s}$，则有$\boldsymbol{B}^T=\left(b_{ji}\right)_{s\times n}$ $\boldsymbol{A}^T=\left(a_{ji}\right)_{n\times m}$． 记$\boldsymbol{AB}=\left(c_{ij}\right)_{m\times s}$，则$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=\left(d_{ij}\right)_{s\times m}$与$\left(\boldsymbol{AB}\right)^T=\left(c_{ji}\right)_{s\times m}$同型．

又因为$\left(\boldsymbol{AB}\right)^T$的$i$行$j$列元$c_{ji}$就是$\boldsymbol{AB}$的$j$行$i$列元，所以

$$c_{ji}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}.$$

而$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$的$i$行$j$列元为

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki},$$

因此，$c_{ji}=d_{ij}\left(i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,m\right)$，故$\left(\boldsymbol{AB}\right)^{T}=\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{A}^{T}$．∎

【例 1.9】设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\9&8&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&9\\1&1&0\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{A}^{T}$.

【解】方法一：由例 1．2 可知，$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}4&6&9\\22&31&72\end{pmatrix}$，

于是$\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{A}^{T}=\left(\boldsymbol{AB}\right)^{T}=\begin{pmatrix}4&22\\6&31\\9&72\end{pmatrix}$.

能力培养

培养思维能力，计算能力

方法二：$\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{A}^{T}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\0&9&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&9\\1&8\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&22\\6&31\\9&72\end{pmatrix}$.

【例 1.10】证明：$\left(\boldsymbol{ABC}\right)^{T}=\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{A}^{T}$．

【证】由矩阵转置的运算规律可得

$$\left(\boldsymbol{ABC}\right)^{T}=\left((\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}\right)^{T}=\boldsymbol{C}^{T}\left(\boldsymbol{AB}\right)^{T}=\boldsymbol{C}^{T}\left(\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{A}^{T}\right)=\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{A}^{T}.$$

用数学归纳法可以证明下面的等式

$$\left(\boldsymbol{A}_{1}\boldsymbol{A}_{2}\cdots\boldsymbol{A}_{k}\right)^{T}=\boldsymbol{A}_{k}{}^{T}\cdots\boldsymbol{A}_{2}{}^{T}\boldsymbol{A}_{1}{}^{T}.$$

定义 若$\boldsymbol{A}^{T}=\boldsymbol{A}$，则称$\boldsymbol{A}$为对称矩阵；若$\boldsymbol{A}^{T}=-\boldsymbol{A}$，则称$\boldsymbol{A}$为反对称矩阵.

【注】由定义可以得到以下结论：

（1）对称矩阵和反对称矩阵都是方阵；

（2）对称矩阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n}$的元素满足$a_{ij}=a_{ji}\ i,\ j=1,2,\ldots,n$；

（3）反对称矩阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n}$的元素满足$a_{ij}=-a_{ji}\ i\neq j$，$a_{ii}=0$，$i,\ j=1,2,\ldots,n$．

（4）若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为对称矩阵（或者反对称矩阵），则$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$k\boldsymbol{A}$也是对称矩阵（或者反对称矩阵）；

能力培养

通过证明培养学生的逻辑思维能力，加

（5）设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为对称矩阵，则$\boldsymbol{AB}$为对称矩阵当且仅当$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

（6）对任意矩阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$\boldsymbol{AA}^{T}$与$\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}$都是对称矩阵.

【证】只证明（5）.

<table>
<tr>
<td>

若 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵，即 $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{AB}$，所以 $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{BA}$；

反之，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$，即 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵．█

【例 1.11】设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵． 证明 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 为对称矩阵．

【证】由转置运算的规律有

$(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})^T=(\boldsymbol{AB})^T-(\boldsymbol{BA})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{B}(-A)-(-A)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$.

三、回顾和小结

1. 矩阵的概念；

2. 矩阵的线性运算；

3. 矩阵的乘法

四、复习思考与作业

思考题：

1. 矩阵的直观定义是数表，根据矩阵的应用实例，你能找出矩阵有什么深层的含义吗？在 MATLAB 中输入一个矩阵，编程实现将各行元素求和。

2. 设 A 与 B 为 n 阶方阵，问等式

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$$

成立的充要条件是什么?

作业题：

习题 1.2：2（2)(4）、3（2)(4）、6(1)(3)(5)、7、9(1)(2)

</td>
<td>深对知识点的理解

编程可讨论或分组完成，让学生感受主动参与、合作交流的乐趣，获得积极的情感体验；</td>
</tr>
</table>

第（2）次课

教学章节	第一章第 1.3 节	学时	2 学时

<table>
<tr><td>教材
和参考书</td><td>1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书）
2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书）
3. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考）
4. Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra，Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
5. Jim Hefferon，Linear Algebra，available for free online，2014. （教学参考）
6. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008.（教学参考）
1. 刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. 教学目的：理解逆矩阵的概念；掌握逆矩阵的性质和计算方法；通过思政案例培养学生逻辑推理能力及抽象思维能力；并培养家国情怀,初步培养用矩阵及数学软件解决实际问题的能力；感受主动参与、合作交流的乐趣，获得积极的情感体验；
2. 教学重点：逆矩阵概念和计算；
3.教学难点：逆矩阵概念和计算。</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. 教学内容：逆矩阵；
2. 时间安排：2 学时；
3. 教学方法：讲授与讨论相结合；
4. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc 平台讨论+测试。</td></tr>
<tr><td colspan="2">教学设计：
课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析，培养学生自主学习能力，训练独立思考的素质）：
1. 复习矩阵的线性运算和矩阵的乘法；
2.整理一个数的倒数（逆）的概念，观察倒数和 1 之间的关系。
课中检测，并探讨重点、难点知识点（将启发式、互动式和探究式等多种教学方法适时融入教学过程，提高学生课堂学习的深度参与度，培养逻辑思维能力，思辨能力等）：</td></tr>
</table>

多种形式的课堂讨论：

①启发式提问引起课堂讨论：讨论逆矩阵在应用中的作用，从而深入理解逆矩阵的意义。

②提问预习结果：什么是倒数？一个数的导师是多少？1 和倒数有什么关系？并加以点评。老师起引导作用，主要锻炼同学利用所学知识分析问题解决问题的能力。

7. 翻转课堂：

根据课前布置的任务，翻转课堂，由学生分享单位阵和数字“1”，矩阵的逆和倒数间的联系与区别。

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况，帮助学生进一步深入理解掌握知识点，培养解决复杂问题的能力，训练学以致用的素质）

1. 布置书后作业，北化在线平台提交；

2. 在 MOOC 平台讨论区，展开内容讨论“0”和“1”，并及时评价：

3. 在北化在线平台完成课后测试；

4. 在微信群、企业微信群、mooc 平台、线下随时回答解决同学的问题；

基本内容	教学反思

第三节 逆矩阵

思政元素

讴歌英雄，进行价值引领，培养家国情怀，只要有信仰，就可以做不平凡的事。

一、 案例导引

通过电影“永不消逝的电波”，讲解信息加密的方法之一希尔密码。

方法：将编码信息按列放置在矩阵 B 中，

$$B=\begin{bmatrix}5 & 21 & 10\\ 8 & 7 & 8\\ 10 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

设密钥矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$C=AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 21 & 10\\ 8 & 7 & 8\\ 10 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}31 & 37 & 29\\ 80 & 83 & 69\\ 54 & 67 & 50\end{bmatrix}$$

由此得到密文（用于传输的信息编码）：（31，37，29，80，83，69，54，67，50）

如何定义密钥矩阵？

接收方如何还原信息？

能力培养

培养学生逻辑思维能力。

二、浸入式学习与价值引领

1. 逆阵的定义

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵．若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，简称 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$．

2. 逆矩阵的性质

定理 1.1 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则它的逆矩阵是唯一的．

【证】设 $\boldsymbol{B}_1$ 与 $\boldsymbol{B}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则有

$\boldsymbol{AB}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$， $\boldsymbol{AB}_2=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$．

因此，$\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{AB}_1)=(\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}_1$． ▌

【例 1.12】证明：二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 不可逆．

能力培养

倒数的性质，逆矩阵的性质，有什么相似之处：培养学生思辨能力和逻辑思维能

【解】设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$ 为任意的二阶矩阵，由于 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z & y+w\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$，即任何一个二阶矩阵与 $\boldsymbol{A}$ 的乘积都不可能等于单位矩阵，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆． 【例 1.13】证明如下结论． （1）若 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵． （2）单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $\boldsymbol{E}^{-1}=\boldsymbol{E}$． （3）当 $d_1d_2\cdots d_n\neq 0$ 时，对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 可逆，且 $\boldsymbol{D}^{-1}=\mathrm{diag}(d_1^{-1},\ldots,d_n^{-1})$． （4）当 $ad-bc\neq 0$ 时，二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$． 【证明】（1）若 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$， 两边同时右乘以 $\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，两边同时左乘以 $\boldsymbol{A}$ 得，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$，于是 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵． （2）因为 $\boldsymbol{EE}=\boldsymbol{EE}=\boldsymbol{E}$，故单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $\boldsymbol{E}^{-1}=\boldsymbol{E}$． （3）当 $d_1d_2\cdots d_n\neq 0$ 时，$d_1^{-1},\ldots,d_n^{-1}$ 存在．因为 $\boldsymbol{DD}^{-1}=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)\mathrm{diag}(d_1^{-1},\cdots,d_n^{-1})=\mathrm{diag}(d_1d_1^{-1},\cdots,d_nd_n^{-1})=\boldsymbol{E}$， $\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_1^{-1},\cdots,d_n^{-1})\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)=\mathrm{diag}(d_1^{-1}d_1,\cdots,d_n^{-1}d_n)=\boldsymbol{E}$， 故 $\boldsymbol{D}$ 可逆，且 $\boldsymbol{D}^{-1}=\mathrm{diag}(d_1^{-1},\cdots,d_n^{-1})$． (4) 设 $\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$，则因为 $\boldsymbol{AB}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}ad-bc & 0\\ 0 & -cb+da\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{BA}$，	力。 **能力培养** 思考，什么样的二阶方阵才可逆？方阵 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，并不意味着它的逆矩阵存在．对比一个数只要不等于零，则它必有逆或倒数，因此矩阵可逆的条件远不如数可逆的条件那么明显． 培养学生逻辑思维能力。 **能力培养** 由低阶方阵的逆，猜想高阶

故二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.	方阵逆的计算，培养逻辑思维能力。
利用逆矩阵的定义还可以得到如下可逆矩阵的性质.	
定理 1．2 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 可逆，数 $k\neq 0$，则	
（1） $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆，且 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}$；	
（2） $k\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；	**能力培养** 通过逆矩阵的性质，加强对逆矩阵的理解。
（3） $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；	
（4） $\boldsymbol{A}^{T}$ 可逆，且 $\left(\boldsymbol{A}^{T}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{T}$.	
【证】只证明（3）和（4）.	
（3）因为 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BB}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{AEA}^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$，	
同理，	
$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{BEB}^{-1}=\boldsymbol{BB}^{-1}=\boldsymbol{E},$	
所以 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$. ▌	
（4）根据矩阵转置的性质有	
$\boldsymbol{A}^{T}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{T}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{T}=(\boldsymbol{E})^{T}=\boldsymbol{E}$ 且 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{T}\boldsymbol{A}^{T}=\left(\boldsymbol{AA}^{-1}\right)^{T}=(\boldsymbol{E})^{T}=\boldsymbol{E}$.	
由逆矩阵的定义可知，$\boldsymbol{A}^{T}$ 可逆，且 $\left(\boldsymbol{A}^{T}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{T}$. ▌	
推论 1．1 若 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 都可逆，则它们的乘积也可逆，并且	
$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{-1}=\boldsymbol{A}_s^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$.	
另外，当 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，如果定义 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}^{-k}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{k}$，其中 k 为正整数，则	
对整数 s 、t，可以定义 $\boldsymbol{A}^{s}$，而且	
$\boldsymbol{A}^{s}\boldsymbol{A}^{t}=(\boldsymbol{A})^{s+t}$，$\left(\boldsymbol{A}^{s}\right)^{t}=(\boldsymbol{A})^{st}$.	
【例 1.14】设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$．证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，并求 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$.	**典型习题讲解**
【解】由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ 可得 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{2E}$，于是	

$(A-E)\cdot\left[\frac{1}{2}(A+2E)\right]=E$，$\left[\frac{1}{2}(A+2E)\right]\cdot(A-E)=E$， 故 $A-E$ 可逆，且 $(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2E)$ **三、　回顾和小结** 1. 逆矩阵的概念 2. 逆矩阵的性质和计算方法 **四、　复习思考与作业** **思考题：** 一个方阵，如果有一行为零，或一列为零，这个矩阵可逆吗？为什么？ **作业题：** 习题 1.3：2、4、5	培养逻辑思维能力和计算能力

第（3）次课

教学章节	第一章第 1.4 节	学时	2 学时
教材 和参考书	7. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书） 8. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书） 9. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考） 10. Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra，Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考） 11. Jim Hefferon，Linear Algebra，available for free online，2014. （教学		

	参考） 12. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008.（教学参考） 2. 刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）

3. 教学目的：掌握矩阵分块的意义，矩阵分块法的运算性质和方法；

4. 教学重点：矩阵分块；

3.教学难点：矩阵分块的方法。

5. 教学内容：分块矩阵；

6. 时间安排：2 学时；

7. 教学方法：讲授与讨论相结合；

8. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，MOOC 平台讨论+北化在线测试。

教学设计：

课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析）：

1.学习北化在线平台 1.4 节视频，整理问题，课上进行学习；

2.思考，在数的运算中，当遇到大数运算时，我们采用过什么方法来简化运算呢？

课中检测，并探讨重点、难点知识点：

多种形式的课堂讨论：

①启发式提问引起课堂讨论：讨论分块矩阵的应用意义。

②教师举例引起课堂讨论：简介分块矩阵的三角分解，讨论三角分解的应用优势。

③提问预习结果：如何简化大规模矩阵运算？矩阵分解，化大为小。

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况）

1.布置书后作业，北化在线平台提交；

2.在北化在线平台完成课后测试；

3.在微信群、企业微信群、mooc 平台、线下随时回答解决同学的问题；

基本内容	教学反思
第四节　　分块矩阵 **一、　案例导引** 在实际问题中经常碰到行数和列数都很大的矩阵．当人们碰到一张很大的表格时，自然是分部分来看．	

$$A=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&9&2&1&1&9&2&3\\1&9&2&2&1&9&2&7\\1&9&2&3&1&9&2&5\\1&9&2&5&1&9&2&6\\1&9&2&7&1&9&2&7\end{array}\right)$$

二、 浸入式学习与价值引领

1. 分块矩阵的定义

用若干条横线或者竖线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 划分成若干个小矩阵，每个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块或子阵，以这些子阵为元素构成的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个分块矩阵.

【例 1.15】（1）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&2&9\\1&-1&0&1&8\\0&1&2&1&5\end{pmatrix}$，若按以下形式分块

$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&2&9\\\hline 1&-1&0&1&8\\0&1&2&1&5\end{array}\right)$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$，其中

$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix}2&9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_{22}=\begin{pmatrix}1&8\\1&5\end{pmatrix}$.

若按以下形式分块

$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|cc|cc}1&0&1&2&9\\\hline 1&-1&0&1&8\\0&1&2&1&5\end{array}\right)$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}&\boldsymbol{B}_{13}\\\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}&\boldsymbol{B}_{23}\\\boldsymbol{B}_{31}&\boldsymbol{B}_{32}&\boldsymbol{B}_{33}\end{pmatrix}$，其中

$\boldsymbol{B}_{11}=(1)$，$\boldsymbol{B}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_{13}=\begin{pmatrix}2&9\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{B}_{21}=(1)$，$\boldsymbol{B}_{22}=\begin{pmatrix}-1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_{23}=\begin{pmatrix}1&8\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{B}_{31}=(0)$，$\boldsymbol{B}_{32}=\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_{33}=\begin{pmatrix}1&5\end{pmatrix}$.

（2）线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}$ 的增广矩阵

能力培养
动画播放矩阵分块，化抽象为具体，培养抽象思维能力

能力培养
课堂互动，让学生完成对

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc|c}\boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} & \boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} & \boldsymbol{b}_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mn} & \boldsymbol{b}_m\end{array}\right)$$ 就是由子块 $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$ 与 $$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$ 组成的分块矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\right)$.

增广矩阵的分块，培养学生逻辑思维能力。

（3）把一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素看成为 1 阶子块，这个矩阵也可看作由 $m\times n$ 个子块组成的分块矩阵.

（4）把一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行作为一个子块，第 i 行形成的矩阵记为 $\boldsymbol{\alpha}_i$，则有

$$\left(\begin{array}{cccc}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}\ (i=1,2,\ldots,m).$$

（5）把一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一列作为一个子块，第 j 列形成的矩阵记为 $\boldsymbol{\beta}_j$，则有

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|c|c|c}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\beta}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}\quad (j=1,2,\ldots,n).$$

2. 分块矩阵的运算

参与运算的矩阵按块能运算，并且参与运算的子块也能运算，即，“块内”和“块外”都能运算.

（1）加法 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同且列数相同，分块方法相同. 若

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{uv}$ 与 $\boldsymbol{B}_{uv}$ 的行数相同且列数相同，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}+\boldsymbol{B}_{1t}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}+\boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix}$$

能力培养
化大为小，逐个击破，培养学生逻辑思维能力，解决问题能力和计算能力。

（2） 数乘设 k 为数，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st} \end{pmatrix}$，则 $k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{st} \end{pmatrix}$.

显然，分块矩阵的加法与数乘运算也满足§1.1.2 中的八条运算规律.

（3）转置 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^T & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1t}^T & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}^T \end{pmatrix}$.

【注】分块矩阵的转置，不仅需将相应的行顺次改成列，还需要将每个子块取转置.

(4) 乘法 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times l$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $l\times n$ 矩阵，分块成

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{su} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{u1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{ut} \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{i1},\ldots,\boldsymbol{A}_{iu}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j},\ldots,\boldsymbol{B}_{uj}$ 的行数，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{st} \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{C}_{pq}=\sum_{k=1}^{u}\boldsymbol{A}_{pk}\boldsymbol{B}_{kq}\ (p=1,\ldots,s,q=1,\ldots,t)$.

【例 1.16】设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

利用分块矩阵计算 $\boldsymbol{AB}$.

能力培养

培养计算能力，巧用分块，提高计算能力。

【解】观察 $\boldsymbol{A,B}$ 的特点，分别将其分块为

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\triangleq\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{O}_2 \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{E}_2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{array}\right)\triangleq\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} \\ \hdashline \boldsymbol{B}_{12} \end{pmatrix},$$

从而有

$$AB=\begin{pmatrix} E_2 & O \\ A_{21} & E_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_2B_{11}+OB_{11} \\ A_{21}B_{11}+E_2B_{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{11} \\ A_{21}B_{11}+B_{12} \end{pmatrix}.$$

$$A_{21}B_{11}+B_{12}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

因此，$AB=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

3. 分块对角矩阵及其性质

能力培养 培养学生逻辑思维能力。

设 A 为 n 阶方阵，若 A 的分块矩阵的对角线以外的子块都为零矩阵，且对角线上的子块都是方阵，即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s \end{pmatrix},\text{简记为 } A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},\text{或 } \operatorname{diag}(A_1,A_2,\dots,A_s).$$

其中 $A_j \quad (j=1,\dots,s)$ 都是方阵，则称 A 为分块对角矩阵简称分块对角阵.

强调：分块对角阵与对角阵的联系与区别。

1. 性质：

设有两个分块对角阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix},$$

能力培养 培养学生逻辑思维能力和计算能力。

其中 A_j 与 B_j 为同阶方阵 $(j=1,\dots,s)$，则有

（1）$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sB_s \end{pmatrix}$，$A^k=\begin{pmatrix} A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^k \end{pmatrix}$，$k$ 为非负整数.

（2） 当 $A_j\ (j=1,\cdots,s)$ 都可逆时，A 可逆，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}，且\ A^k=\begin{pmatrix} A_1^{k} & & & \\ & A_2^{k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{k} \end{pmatrix}，k\ 为任意整数.$$ 【例 1．17】 设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}(ab\neq 0)$，按照分块矩阵求 A^{-1}，对正整数 n 求 A^n． 【解】将 A 分块为 $$A=\left(\begin{array}{cc:cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)\triangleq\begin{pmatrix} A_{11} & O_2 \\ O_2 & A_{22} \end{pmatrix},$$ 其中 $A_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B_1=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$，则 $A_1^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$，$B_1^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{-1}{b^2} & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$. 因此， $$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & B_1^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{b^2} & \frac{1}{b} \end{pmatrix}.$$ 又因为 $$A_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=aE+U,\quad U^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ $$A_1^n=(aE+U)^n=(aE)^n+C_n^1(aE)^{n-1}U+C_n^2(aE)^{n-2}U^2+\cdots+U^n$$ $$=a^nE+na^{n-1}U=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$	**能力培养** 培养学生计算能力。

类似的计算可得 $\boldsymbol{B}_1^n=\begin{pmatrix} b^n & 0 \\ nb^{n-1} & b^n \end{pmatrix}$.

因此，$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^n & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_1^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & nb^{n-1} & b^n \end{pmatrix}$.

扩展延伸：分块矩阵的 LU 分解

三角分解(LU 分解)

在线性代数中， LU 分解(LU Decomposition)是矩阵分解的一种，可以将一个矩阵分解为一个单位下三角矩阵和一个上三角矩阵的乘积（有时是它们和一个置换矩阵的乘积）。本质上，LU 分解是高斯消元的一种表达方式。首先，对矩阵 A 通过初等行变换将其变为一个上三角矩阵。然后，将原始矩阵 A 变为上三角矩阵的过程，对应的变换矩阵为一个下三角矩阵。

A = LU，这里将A的对应元素求出。可以直接顺序计算LU值

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{44} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} & l_{21}u_{14}+u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44} \end{bmatrix}$$

分块矩阵的三角分解

对于非奇异 n 阶方阵A，可分割成分块矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \hline \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{array}\right]=\boldsymbol{L}_1\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_{11} & 0 \\ \hline 0 & \boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{array}\right]\boldsymbol{U}_1$$
$$=\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I}_{n_1} & 0 \\ \hline \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}_{n_2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_{11} & 0 \\ \hline 0 & \boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I}_{n_1} & \boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \\ \hline 0 & \boldsymbol{I}_{n_2} \end{array}\right] \quad (1)$$

式中,A12 和A22 分别为 n1 阶和 n2 阶方阵, n1+ n2=n, A11 又为非奇异阵,L1 和 U1 分别为下三角阵和上三角阵。

三、回顾和小结

能力培养
拓展视野，培养应用能力你

矩阵分块法的运算性质和方法 分块矩阵的LU分解 **四、复习思考与作业** **思考题：** 矩阵为什么要分块？查阅文献，学习LU分解有什么应用？ **作业题：** 习题1.4：1（1）（2）、3、4	

第（4）次课

教学章节	第一章第1.5,1.6节	学时	2学时
教材 和参考书	1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书） 2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书） 3. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考） 4. Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, Wellesley Cambridge Press, 2009. （教学参考） 5. Jim Hefferon, Linear Algebra, available for free online, 2014. （教学参考） 6. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考） 刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）		

1. 教学目的：理解矩阵初等变换的概念；掌握如何运用矩阵的初等行变换求阶梯型矩阵；理解初等矩阵的定义，掌握如何用矩阵乘以初等矩阵来描述初等变换；培养学生逻辑推理能力及抽象思维能力；通过思政案例矩阵与方程术，培养民族自信。

2. 教学重点：用初等变换化行阶梯型；用初等矩阵乘矩阵表示初等变换；

3. 教学难点：用初等矩阵乘矩阵表示初等变换。

4. 教学内容：矩阵的初等变换，初等矩阵；

5. 时间安排：2 学时；

6. 教学方法：例证法、启发诱导法、讲授法与讨论相结合；

7. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，MOOC 平台讨论+北化在线测试。

教学设计：

课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析）：

1. 复习高斯消元法求解线性方程组；
2. 探寻消元法求解方程组过程中，求解的决定因素：
3. 查阅文献，学习九章算术中的方程术，与高斯消元法做对比。

课中检测，并探讨重点、难点知识点

多种形式的课堂讨论：

①启发式提问引起课堂讨论：高斯消元法中，什么决定方程组的解。

②提问预习结果：方程术与消元法本质上有区别吗？

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况）

1. 布置书后作业，北化在线平台提交；
2. 在北化在线平台完成课后测试；
3. 在微信群、企业微信群、MOOC 平台、线下随时回答解决同学的问题；

基本内容	教学反思
第五节　矩阵的初等变换与初等矩阵 **一、　案例导引：** $$A=\begin{pmatrix}1&2&7&11&-2\\3&6&8&-7&5\\1&2&1&6&3\\4&9&2&-8&5\\8&7&6&3&9\end{pmatrix}$$	**前测：** 前面例题中讨论过二阶方阵可逆判断及求逆矩阵方法，那么对于 5 阶方阵 **A** 如何判

矩阵的初等变换是线性代数中最基本的运算之一，它在求可逆矩阵的逆矩阵，求矩阵的秩以及求线性方程组的解等方面，都起着举足轻重的作用，同时，与初等变换有关的初等矩阵，也是线性代数理论中的一个重要工具. **二、 浸入式学习与价值引领** **1. 初等变换的定义** 对矩阵施行下列三种变换称为矩阵的初等行变换： (1) 换法变换：交换矩阵的某两行的位置； (2) 倍法变换：用一个非零数 $k\neq 0$ 去乘矩阵的某一行的所有元素； (3) 消法变换：把某一行的倍数加到另一个行的对应元素上去. 对于矩阵的初等行变换，我们引进以下记号： 交换矩阵的第 i 和第 j 两行，记为 $r_i\leftrightarrow r_j$； 用一个非零数 $k\neq 0$ 去乘矩阵的第 i 行记为 kr_i； （3）把第 i 行的 k 倍加到第 j 行上去记为 r_j+kr_i. 初等行变换是可逆的，并且其逆变换仍是同一类的初等行变换. 如果将定义中的行均改为列，称为矩阵的初等列变换，记号相应的改记为 c. 矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换. 初等变换是可逆的变换，其逆变换是同一类的初等变换. 每一步初等变换之后的矩阵与前一步的矩阵不再相等，同时我们也注意到矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是行阶梯形矩阵. 那么，任何一个矩阵都能通过初等变换化成阶梯形矩阵吗？初等变换之后的矩阵与原矩阵有什么联系呢？ **2. 初等变换化阶梯型** 定理 1.3 任意 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 总可以经过有限次初等行变换化为行阶梯形矩阵. *【证明】若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为 0，则 $\boldsymbol{A}$ 已经是简化行阶梯形矩阵. 若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{A}$ 中存在非零元，进而存在非零列，此时设第 j 列是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中自左而右的第一个非零列，不妨设为 $a_{1j}\neq 0$（否则，可经过交换两行，把第 j 列的非零	断可逆或求逆矩阵呢？ **能力培养** 培养逻辑思维能力和思辨能力

元换到第一行第 j 列的位置），因此可以利用 a_{1j} 将第 j 列位于 a_{1j} 下面的元素都化为 0，这就要对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分别做初等行变换 $$r_i+\left(-\frac{a_{ij}}{a_{1j}}\right)r_1,\quad i=1,2,\cdots,m.$$ 则 $$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}_1=\left(\begin{array}{cccc\|ccc} 0 & \cdots & 0 & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \boldsymbol{B}_1 & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \end{array}\right).$$ 其中 $\boldsymbol{B}_1$ 是 $(m-1)\times(n-j)$ 矩阵，对 $\boldsymbol{B}_1$ 施行上面同样的步骤，如此下去，即可得到行阶梯形矩阵．∎ 定理 1.4　任意 $m\times n$ 行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{A}$ 总可以经过有限次初等行变换化为简化行阶梯形矩阵． 【例 1.18】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$．利用初等行变换，按照如下要求化 $\boldsymbol{A}$ 为简化行阶梯形矩阵． （1）先将 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵，再化为简化行阶梯形矩阵； （2）不通过求 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形，直接将 $\boldsymbol{A}$ 化为简化行阶梯形矩阵． 【解】	**能力培养** 培养运用所学知识，解决问题能力 **能力培养** 培养学生的计算能力

$$A=\begin{pmatrix}0&0&2&-3&-7\\0&1&-1&3&2\\0&-5&-3&9&6\\0&3&2&-6&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}0&1&-1&3&2\\0&0&2&-3&-7\\0&-5&-3&9&6\\0&3&2&-6&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_3+5r_1}\begin{pmatrix}0&1&-1&3&2\\0&0&2&-3&-7\\0&0&-8&24&16\\0&0&5&-15&-10\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-\frac{5}{2}r_2]{r_3+4r_2}\begin{pmatrix}0&1&-1&3&2\\0&0&2&-3&-7\\0&0&0&12&-12\\0&0&0&-\frac{15}{2}&\frac{15}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+\frac{15}{24}r_3}\begin{pmatrix}0&1&-1&3&2\\0&0&2&-3&-7\\0&0&0&12&-12\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\triangleq B.$$

至此，已将A化为阶梯形矩阵B．现在继续对B做初等行变换将其化为简化行阶梯形：

$$B=\begin{pmatrix}0&1&-1&3&2\\0&0&2&-3&-7\\0&0&0&12&-12\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{12}r_3]{\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}0&1&-1&3&2\\0&0&1&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{2}\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\triangleq B_1$$

$$\xrightarrow[r_2+\frac{3}{2}r_3]{r_1-3r_3}\begin{pmatrix}0&1&-1&0&5\\0&0&1&0&-5\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\triangleq B_2\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-5\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\triangleq C.$$

至此，已将A化为简化行阶梯形矩阵C.

（2）利用初等行变换，直接将A化为简化行阶梯形矩阵：

能力培养

培养学生计算能力

$$A=\begin{pmatrix}0&0&2&-3&-7\\0&1&-1&3&2\\0&-5&-3&9&6\\0&3&2&-6&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}0&1&-1&3&2\\0&0&2&-3&-7\\0&-5&-3&9&6\\0&3&2&-6&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_3+5r_1}\begin{pmatrix}0&1&-1&3&2\\0&0&2&-3&-7\\0&0&-8&24&16\\0&0&5&-15&-10\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{5}r_4]{-\frac{1}{8}r_3}\begin{pmatrix}0&1&-1&3&2\\0&0&2&-3&-7\\0&0&1&-3&-2\\0&0&1&-3&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}0&1&-1&3&2\\0&0&1&-3&-2\\0&0&2&-3&-7\\0&0&1&-3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_2\\r_4-2r_2}]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&-3&-2\\0&0&0&3&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}r_3]{r_2+r_3}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-5\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

【例 1.19】设矩阵 $A=\begin{pmatrix}7&0&7&-3&3\\2&-1&4&-3&-4\\3&1&1&0&1\\1&0&1&-1&-3\end{pmatrix}$，用初等行变换化矩阵 A 为简化行阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}7&0&7&-3&3\\2&-1&4&-3&-4\\3&1&1&0&1\\\boxed{1}&0&1&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&1&-1&-3\\2&-1&4&-3&-4\\3&1&1&0&1\\7&0&7&-3&3\end{pmatrix},$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-3r_1\\r_4-2r_1}]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{c:cccc}\boxed{1}&0&1&-1&-3\\\hdashline 0&-1&2&-1&2\\0&1&-2&3&10\\0&0&0&4&24\end{array}\right)\triangleq A_1$$

,

$$A_1=\left(\begin{array}{c:cccc}\boxed{1}&0&1&-1&-3\\\hdashline 0&-1&2&-1&2\\0&\boxed{1}&-2&3&10\\0&0&0&4&24\end{array}\right)\xrightarrow[r_4\div 4]{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{c:cccc}\boxed{1}&0&1&-1&-3\\\hdashline 0&\boxed{1}&-2&3&10\\0&-1&2&-1&2\\0&0&0&1&6\end{array}\right)$$

能力培养

培养学生分析问题能力和计算能力

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{cc:ccc}\boxed{1} & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 3 & 10 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6\end{array}\right) \triangleq \boldsymbol{A}_2$$
;

$$\boldsymbol{A}_2 \xrightarrow[r_4-r_3]{r_3\div 2}\left(\begin{array}{cccc:c}\boxed{1} & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 6 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \triangleq \boldsymbol{A}_3$$
,

$$\boldsymbol{A}_3 \xrightarrow[c_3\leftrightarrow c_4]{}\begin{pmatrix}\boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{C}$$
,

$$\boldsymbol{C} \xrightarrow[\substack{c_4-c_1 \\ c_4+2c_2 \\ c_5+3c_1 \\ c_5+8c_2 \\ c_5-6c_3}]{}\begin{pmatrix}\boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \boldsymbol{N}$$
, （1.4）

3. 矩阵的标准型

如果一个非零矩阵的左上角为单位矩阵，其它位置的元素都为零，则称这个矩阵为标准形矩阵.

例如，

$$\left(\begin{array}{cc}1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 \\ 0 & 0\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),\quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

都是标准形矩阵. 如果用分块矩阵的形式表达，则分别为：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_3 \\ \boldsymbol{O}_{13}\end{pmatrix},\quad (\boldsymbol{E}_4 \quad \boldsymbol{O}_{41}),\quad \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_3 & \boldsymbol{O}_{32} \\ \boldsymbol{O}_{13} & \boldsymbol{O}_{12}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_3.$$

定理 1.5 任意 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 总可以经过初等变换化为标准形矩阵.

4. 矩阵等价

能力培养

培养学生分析问题能力

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变换成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价，记为 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$． 若所用的初等变换都是行（列）变换，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行（列）等价．

矩阵等价满足：

（1）反身性：$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{A}$；

（2）对称性：若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{A}$；

（3）传递性：若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{C}$．

定理 1.6　任何矩阵都有与它行等价的行阶梯形矩阵和简化行阶梯形矩阵.

定理 1.7 任何一 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于一个如下形式的标准形：

$$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

并称矩阵 $\boldsymbol{N}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形，此标准形由三个数 m,n 和 r 唯一确定，其中 r 是行阶梯矩阵的非零行数.

5. 初等矩阵的概念

对 n 阶单位矩 $\boldsymbol{E}_n$ 施行一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

（1）换法初等阵：交换 $\boldsymbol{E}_n$ 的 i,j 两行（列）得到的初等矩阵，记为 $\boldsymbol{E}(i,j)$，即

$$\boldsymbol{E}\xrightarrow[\text{或}c_i\to c_j]{r_i\to r_j}\boldsymbol{E}(i,j)=\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\
&&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\
&&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ \\ \\ (j\text{行}) \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{cc} (i\text{列}) & \qquad\qquad (j\text{列}) \end{array} &
\end{array}$$

能力培养

化具体为抽象，培养学生逻辑思维能力

（2）倍法初等阵：用非零数 k 乘以 $\boldsymbol{E}_n$ 的第 i 行（列）得到的矩阵，记为 $\boldsymbol{E}(i(k))$，即 $$\boldsymbol{E}\xrightarrow[\text{或}kc_i]{kr_i}\boldsymbol{E}(i(k))=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}(i\text{行})$$ $(i$列） （3）消法初等阵：将 $\boldsymbol{E}_n$ 的第 j 行（i 列）的 k 倍加到第 i 行（j 列）得到的矩阵，记为 $\boldsymbol{E}(i+j(k))$，即 $$\boldsymbol{E}(i+j(k))=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\(i\text{行})\\\\j\text{行}\\\\\\\end{matrix}$$ i(列)　　j(列) 【例 1.20】四阶初等阵的例子． $$\boldsymbol{E}(1,2)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{E}(2(k))=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&k&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{E}(3+2(k))=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&k&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$ 【例 1.21】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\\a_{41}&a_{41}&\cdots&a_{4n}\end{pmatrix}$，计算下列(其中的 $k\neq0$)，并从中得出一般性的结论． （1）$\boldsymbol{E}(1,2)\boldsymbol{A}$；（2）$\boldsymbol{E}(2(k))\boldsymbol{A}$；（3）．$\boldsymbol{AE}(1,2)$（6）$\boldsymbol{AE}(2+1(k))$．	**能力培养** 培养学生分析问题能力和计算能力

【解】 （1）$\boldsymbol{E}(1,2)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\\a_{41}&a_{41}&\cdots&a_{4n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\\a_{41}&a_{41}&\cdots&a_{4n}\end{pmatrix}$, 可见：$\boldsymbol{E}(1,2)\boldsymbol{A}$的结果等于对$\boldsymbol{A}$作了一次初等行的换法变换$r_1\leftrightarrow r_2$得到的矩阵； （2） $\boldsymbol{E}(2(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&k&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\\a_{41}&a_{41}&\cdots&a_{4n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\\a_{41}&a_{41}&\cdots&a_{4n}\end{pmatrix}$, 可见：$\boldsymbol{E}(2(k))\boldsymbol{A}$的结果等于对$\boldsymbol{A}$作了一次初等行的倍乘变换$kr_2$得到的矩阵； （4）$\boldsymbol{AE}(1,2)=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\\a_{41}&a_{41}&\cdots&a_{4n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{12}&a_{11}&\cdots&a_{2n}\\a_{22}&a_{21}&\cdots&a_{1n}\\a_{32}&a_{31}&\cdots&a_{3n}\\a_{42}&a_{41}&\cdots&a_{4n}\end{pmatrix}$, 可见：$\boldsymbol{E}(1,2)\boldsymbol{A}$的结果等于对$\boldsymbol{A}$作了一次初等列的换法变换$c_1\leftrightarrow c_2$得到的矩阵； （6）$\boldsymbol{AE}(2+1(k))=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\\a_{41}&a_{41}&\cdots&a_{4n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&k&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}+ka_{11}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}+ka_{21}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}+ka_{31}&\cdots&a_{3n}\\a_{41}&a_{41}+ka_{41}&\cdots&a_{4n}\end{pmatrix}$. 可见：$\boldsymbol{AE}(2+1(k))$的结果等于对$\boldsymbol{A}$作了一次初等列的消法变换；$c_2+kc_1$. 定理 1.8 用一个$m$阶初等矩阵左乘一个$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$等价于对$\boldsymbol{A}$作一次同名的初等行变换；用一个$n$阶初等矩阵右乘一个$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$等价于对$\boldsymbol{A}$作一次同名的初等列变换.	**能力培养** 培养学生分析问题能力和逻辑思维能力和计算能力

定理 1.9 初等矩阵可逆，其逆矩阵还是同名初等矩阵，且 $(\boldsymbol{E}(i,j))^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$，$(\boldsymbol{E}(i(k)))^{-1}=\boldsymbol{E}(i(k^{-1}))$，$(\boldsymbol{E}(i+j(k)))^{-1}=\boldsymbol{E}(i+j(-k))$． 定理 1.8 也可叙述为：对一个$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$施行一次初等行变换，相当于用相应的$m$阶初等矩阵左乘$\boldsymbol{A}$；对一个$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$施行一次初等列变换，相当于用相应的$n$阶初等矩阵右乘$\boldsymbol{A}$． 定理 1.10 对任何$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$． （1）存在$m$阶初等矩阵$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$，使得$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$为行阶梯形矩阵（或简化行阶梯形矩阵）． （2）存在m阶初等矩阵$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$和$n$阶初等矩阵$\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$，使得$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t$为标准形矩阵． 定理 1.11 矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价的充分必要条件是：存在初等方阵$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\ldots,\boldsymbol{P}_s$，$\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\ldots,\boldsymbol{Q}_t$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t$． 第六节　用初等变换求逆矩阵 **一、　案例导引：** 定理 1.12　设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，则以下命题是等价的． （1）$\boldsymbol{A}$是可逆矩阵； （2）$\boldsymbol{A}$与单位矩阵$\boldsymbol{E}_n$等价； （3）$\boldsymbol{A}$可以表示成有限个初等矩阵的乘积； （4）$\boldsymbol{A}$可经过有限次初等行（或列）变换化为单位矩阵$\boldsymbol{E}_n$． **二、　浸入式学习与价值引领** 【证】（1）$\Rightarrow$（2）．对$\boldsymbol{A}$施行若干次初等变换可化为等价标准形$\boldsymbol{N}$，存在n阶初等方阵$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\ldots,\boldsymbol{P}_s$，$\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\ldots,\boldsymbol{Q}_t$，使得	**前测+能力培养：**总结，矩阵可逆的等价命题，培养学生逻辑思维能力。

$A = P_1P_2\cdots P_sNQ_1Q_2\cdots Q_t$.

因为 A 可逆，且初等矩阵可逆，则其乘积也可逆，所以 N 可逆，注意到 N 是 n 阶对角矩阵，于是 N 的对角元素中不能有零元，因此 $N = E$ ，即 $N \cong E$.

（2）⇒（3）．由于 $A \cong E$ 根据等价的对称性知，$E \cong A$，即 E 可经过若干次初等变换化为 A ，从而存在初等矩阵 $P_1,\ldots,P_s,P_{s+1},\ldots,P_t$ ，使得

$P_1\cdots P_sEP_{s+1}\cdots P_t$=$A$,

即 $A = P_1P_2\cdots P_t$.

因为初等矩阵的逆还是初等矩阵，这就证明 A 可以表示成有限个初等矩阵的乘积.

（3）⇒（4）．由 $A = P_1P_2\cdots P_t$，有

$$\left(P_t^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}\right)A = \left(P_t^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}\right)P_1P_2\cdots P_t = P_t^{-1}\cdots P_2^{-1}\left(P_1^{-1}P\right)_1 P_2\cdots P_t = \cdots = E,$$

即

$$P_t^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}A = E,$$

由于 $P_1^{-1},P_2^{-1},\cdots,P_t^{-1}$ 仍是初等矩阵，上式说明对 A 施行若干次初等行变换可化为单位矩阵 E．同理可证明列的情形，这里忽略.

（4）⇒（1）．设 A 可以经过有限次初等行变换化成单位矩阵 E，则存在初等矩阵 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_t$，使得 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_tA = E$，由于初等矩阵都是可逆的，所以

$$A = Q_t^{-1}Q_{t-1}^{-1}\cdots Q_2^{-1}Q_1^{-1},$$

从而可逆矩阵的乘积 A 可逆．■

若 A 为 n 阶可逆矩阵，则存在初等矩阵 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_t$ 使得

$$Q_1,Q_2,\cdots,Q_tA = E,$$

上式两边右乘以 A^{-1}，则有

能力培养

通过分析，引导学生总结出：方阵 A 不可

$\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}$，将 $\boldsymbol{A}$ 施行一系列初等行变换化为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的同时，则对 $\boldsymbol{E}$ 施行相同的一系列初等行变换可化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$．于是得到利用初等变换法求逆矩阵的方法：

首先构造一个 $n\times(2n)$ 矩阵 $\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E})$，其左面的 n 行 n 列是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，右边的 n 行 n 列是一个 n 阶单位阵，然后对 $n\times(2n)$ 矩阵 $\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E})$ 做初等行变换，使得 $\boldsymbol{A}$ 被化为单位阵时，$\boldsymbol{E}$ 就被化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}^{-1}).$$

【例 1.22】求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&9\\1&2&0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵．

【解】因为

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&1&9&0&1&0\\1&2&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-1)r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&0&9&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{\substack{r_1+(-1)r_3\\ \frac{1}{9}r_2}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&0&-1\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&-\frac{1}{9}&\frac{1}{9}&0\end{array}\right).$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&0&1\\-\frac{1}{9}&\frac{1}{9}&0\end{pmatrix}$．

【注】类似地讨论，也可以得到利用初等列变换的方法求逆矩阵．

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \hdashline \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{初等列变换}]{}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \hdashline \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}.$$

至此我们得到了求逆矩阵的初等变换法，这种求逆矩阵的方法，还可以可用来解决一般矩阵方程求解问题．

逆的充分与必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 不与单位矩阵等价，即 $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换不能化为单位矩阵．培养学生抽象思维能力。

（1）设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆方阵，$\boldsymbol{B}$ 为已知矩阵，求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$．显然，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$．具体为

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{X})$$

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆方阵，$\boldsymbol{B}$ 为已知矩阵，求解矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$．显然，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$．具体为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \hdashline \boldsymbol{E}\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{初等列变换}]{} \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \hdashline \boldsymbol{X}\end{pmatrix}$$

（3）设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为已知的可逆矩阵，求解矩阵方程 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$．显然，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$．

这种情形下，可以结合（1）和（2）分步骤求解．

【例 1.23】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$．

【解】对矩阵 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})$ 做初等行变换

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&1&0\\2&-1&3&1&0&1\\4&1&8&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+(-4)r_1]{r_2+(-2)r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&1&0\\0&-1&-1&-1&-2&1\\0&1&0&-4&-3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1+2r_2]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-9&-9&4\\0&0&-1&-5&-5&2\\0&1&0&-4&-3&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_2]{(-1)r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-9&-9&4\\0&0&1&-4&-3&1\\0&1&0&5&5&2\end{array}\right).$$

所以，$\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-9&-9&4\\-4&-3&1\\5&5&-2\end{pmatrix}$．

思政元素：矩阵与方程术

矩阵起源于中国，在《九章算术》第八章方程章，用矩阵初等变换的思想求解了方程组。下面我们来看一下我国古代了不起的数学成就吧！

问题：今有上禾三秉,中禾二秉,下禾一秉,实三十九斗；上禾二秉,中禾三秉,下禾一

能力培养.

学生独立完成例 1.23，培养学生的计算能力．

秉,实三十四斗；上禾一秉,中禾二秉,下禾三秉,实二十六斗；问上、中、下禾实一秉各几何?

答曰：上禾一秉，九斗、四分斗之一，中禾一秉，四斗、四分斗之一，下禾一秉，二斗、四分斗之三。

术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗，於右方。中、左禾列如右方。以右行上禾遍乘中行而以直除。又乘其次，亦以直除。然以中行中禾不盡者遍乘左行而以直除。左方下禾不盡者，上為法，下為實。實即下禾之實。求中禾，以法乘中行下實，而除下禾之實。餘如中禾秉數而一，即中禾之實。求上禾亦以法乘右行下實，而除下禾、中禾之實。餘如上禾秉數而一，即上禾之實。實皆如法，各得一斗。

翻译：今有上等稻 3 捆、中等稻 2 捆、下等稻 1 捆，共打出 39 斗米；有上等稻 2 捆、中等稻 3 捆、下等稻 1 捆，共打出 34 斗米；有上等稻 1 捆、中等稻 2 捆、下等稻 3 捆，共打出 26 斗米。问上等稻、中等稻、下等稻各 1 捆能打出多少斗米？现在我们用 x,y,z 分别代替上等稻、中等稻、下等稻各 1 捆能打出的斗米数。

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$$

九章算术解法：将方程组的系数和值从右往左排列：【置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗，於右方。中、左禾列如右方。】得到

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

【以右行上禾遍乘中行而以直除。又乘其次，亦以直除。】:中行各元素乘以右行的上禾，然后中行各元素减掉上行对应的元素，直到中行上禾为 0；左行各元素乘以右行的上禾，然后左行各元素减掉右行对应的元素，直到左行上禾为 0。

思政元素

培养文化自信

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array} \to \begin{array}{ccc} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 9 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 78 & 102 & 39 \end{array} \to \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

然后左行各元素乘以中行中禾，然后左行各元素减掉中行对应的元素，直到左行上禾为0。

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array} \to \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{array} \to \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

求下禾【左方下禾不盡者，上為法，下為實。實即下禾之實。】

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array} \to \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 11 & 24 & 39 \end{array}$$

求中禾【求中禾，以法乘中行下實，而除下禾之實。餘如中禾秉數而一，即中禾之實。】

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 11 & 24 & 39 \end{array} \to \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 20 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 11 & 96 & 39 \end{array} \to \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 20 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 11 & 85 & 39 \end{array} \to \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 11 & 17 & 39 \end{array}$$

求上禾【求上禾亦以法乘右行下實，而除下禾、中禾之實。餘如上禾秉數而一，即上禾之實。實皆如法，各得一斗。】

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 11 & 17 & 39 \end{array} \to \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \\ 11 & 17 & 156 \end{array} \to \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 11 & 17 & 111 \end{array} \to \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 11 & 17 & 37 \end{array}$$

可得到：

$$\begin{cases} 4x = 37 \\ 4y = 17 \\ 4z = 11 \end{cases} \to \begin{cases} x = \frac{37}{4} \\ y = \frac{17}{4} \\ z = \frac{11}{4} \end{cases}$$

三、 回顾和小结

1．矩阵初等变换的概念，运用矩阵的初等行变换求阶梯型矩阵；

2．初等矩阵的定义

3. 初等矩阵乘矩阵表示初等变换

能力培养

思考题，为下节做铺垫。引导学生思考解决问题的方式。

四、　　复习思考与作业 **思考题：**对于任给定的矩阵 $\boldsymbol{A}$，它的等价行阶梯形不唯一，所有等价行阶梯中非零行数是否都相等呢？进一步地，矩阵的等价标准形唯一吗？如果唯一，其中的 r 是由哪个量决定的呢？ **作业题：** 习题 1.5：3 习题 1.6：1（2）（7）、2（1）（2）（3）、3	

第（5）次课

教学章节	第一章第 1.7 节，第一章习题课	学时	2 学时
教材 和参考书	1.姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书） 2.崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书） 3.David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考） 4.Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra，Wellesley Cambridge Press，2009.（教学参考） 5.Jim Hefferon，Linear Algebra，available for free online，2014. （教学参考） 6.黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考） 7.刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）		
1.教学目的：了解矩阵的应用及软件求解矩阵运算方法；第一章总复习及典型习题讲解。 2.教学重点：第一章复习及典型习题讲解； 3.教学难点：矩阵典型习题。			

4. 教学内容：矩阵的应用，第一章复习；

5. 时间安排：2 学时；

6. 教学方法：例证法、启发诱导法、讲授法与讨论相结合；

7. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，MOOC 平台讨论+北化在线测试。

教学设计：

课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析）：

1. 复习第一章内容；
2. 整理作业问题：
3. 做第一章思维导图

课中检测，并探讨重点、难点知识点

1. 第一章知识点复习，雨课堂完成第一章典型习题；
2. 翻转课堂

学生讲解作业（一题多解）

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况）

1. 布置书后作业，北化在线平台提交；
2. 在北化在线平台完成课后测试；
3. 在微信群、企业微信群、MOOC 平台、线下随时回答解决同学的问题；

基本内容	教学反思
第七节　矩阵的初等变换与初等矩阵	

一、案例导引：

在生产经营和科技研发中，有许多问题归结为矩阵的问题．而且一旦能把实际问题归结为矩阵问题，就可以用数学方法和计算机来解决实际问题了．本节介绍几个应用例子．

【例 1.28】（成本核算问题）某工厂生产甲、乙、丙三种产品，每件产品的成本和每季度的生产件数如表 1．2 和表 1．3 所示，试提供该厂每季度总成本分类表．

表 1．2　每件产品成本分类表

成本（元）	甲	乙	丙
原材料	0．10	0．30	0．15
劳动力	0．30	0．40	0．25
企业管理	0．10	0．20	0．15

能力培养

培养逻辑思维能力和解决问题能力

表1．3　每季度产品件数分类表

产品	春	夏	秋	冬
甲	4000	4500	4500	4000
乙	2000	2800	2400	2200
丙	5800	6200	6000	6000

【解】将表1．2和表1．3用矩阵来表示，得到

表1．2对应的矩阵记为$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.3 & 0.15\\ 0.3 & 0.4 & 0.25\\ 0.1 & 0.2 & 0.15\end{pmatrix}$.

表1．3对应的矩阵记为$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}4000 & 4500 & 4500 & 4000\\ 2000 & 2800 & 2400 & 2200\\ 5800 & 6200 & 6000 & 6000\end{pmatrix}$.

容易看到，该厂每个季度的总成本分类即该厂三种产品每季度的原材料、劳动力和企业管理成本，即：

$$\boldsymbol{MP}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.3 & 0.15\\ 0.3 & 0.4 & 0.25\\ 0.1 & 0.2 & 0.15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4000 & 4500 & 4500 & 4000\\ 2000 & 2800 & 2400 & 2200\\ 5800 & 6200 & 6000 & 6000\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1870 & 2220 & 2070 & 1960\\ 3450 & 4020 & 3810 & 3580\\ 1670 & 1940 & 18300 & 1740\end{pmatrix}.$$

全年的原材料、劳动力和企业管理总成本为：

$$\boldsymbol{MP}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1870 & 2220 & 2070 & 1960\\ 3450 & 4020 & 3810 & 3580\\ 1670 & 1940 & 1830 & 1740\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8120\\14860\\7180\end{pmatrix}.$$

各季度总成本为：

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{MP}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1870 & 2220 & 2070 & 1960\\ 3450 & 4020 & 3810 & 3580\\ 1670 & 1940 & 1830 & 1740\end{pmatrix}=(6990 \quad 8180 \quad 7710 \quad 728$$

因此得到全年总成本：

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{MP}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1870 & 2220 & 2070 & 1960\\ 3450 & 4020 & 3810 & 3580\\ 1670 & 1940 & 1830 & 1740\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=30160.$$

把上面的计算汇总到一张报表，得表 1．4

表 1．4　全年各类产品成本分类汇总表

成本（元）	春	夏	秋	冬	全年
原材料	1870	2220	2070	1960	8120
劳动力	3450	4020	3810	3580	14860
企业管理	1670	1940	1830	1740	7180
按季汇总	6990	8180	7710	7280	30160

如果三种产品单价分别是 3、6、5 元，那么，产品全部卖出获得的毛收入为

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1870 & 2220 & 2070 & 1960 \\ 3450 & 4020 & 3810 & 3580 \\ 1670 & 1940 & 1830 & 1740 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 34660 & 40480 & 38220 & 36060 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=149420\text{（元）}.$$

二、 浸入式学习与价值引领

能力培养
培养运用所学知识，解决问题能力

【例 1.29】（逆矩阵在信息加密中的应用）在密码学中，原来的消息为明文，经过伪装的明文为密文．明文变成密文的过程称为加密，由密文变成明文的过程称为译密，改变明文的方法称为密码．现要送出的消息为“ACCOMPLISH THE TASK.”，请采用逆矩阵对明文加密和译密．

【解】首先把每个字母 A,B,C,⋯,Z 映射到数 1,2,3，⋯，26．例如，数 1 表示 A，数 11 表示 K；另外，用 0 表示空格，27 表示句号等．于是数集

$$\{1,3,3,15,13,16,12,9,19,8,5,0,20,19,11,27\}$$

表示消息“ACCOMPLISH THE TASK”．这个消息（按列）写成 4×5 矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 1 & 13 & 19 & 8 & 1 \\ 3 & 16 & 8 & 5 & 19 \\ 3 & 12 & 0 & 0 & 11 \\ 15 & 9 & 20 & 20 & 27 \end{pmatrix}$$

密码的发送者和接收者使用的密码矩阵是:

能力培养
培养学生的计算能力

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\3 & 0 & -3 & 4\\3 & -2 & 2 & -1\\-1 & 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

乘积 $\boldsymbol{AM}$ 为加密后的消息，接收者收到的矩阵

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AM}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\3 & 0 & -3 & 4\\3 & -2 & 2 & -1\\-1 & 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 13 & 19 & 8 & 1\\3 & 16 & 8 & 5 & 19\\3 & 12 & 0 & 0 & 11\\15 & 9 & 20 & 20 & 27\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10 & -6 & 31 & 23 & -2\\54 & 39 & 137 & 104 & 78\\-12 & 22 & 21 & -6 & -40\\-22 & 9 & -51 & -43 & -14\end{pmatrix}$$

之后接收者通过计算乘积 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 来译出消息.

其逆矩阵（译码矩阵）是：

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}9 & 1 & -1 & 7\\5 & 1 & -1 & 5\\-19 & -1 & 3 & -13\\-21 & -1 & 3 & -15\end{pmatrix}$$

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
A=[1 -1 -1 1;3 0 -3 4;3 -2 2 -1;-1 1 2 -2];                % 定义明文矩阵
M=[1 13 19 8 1;3 16 8 5 19;3 12 0 0 11;15 9 20 20 27];   % 定义密钥矩阵
C=A*M                                                       % 利用矩阵乘法得
密文矩阵
C =
      10     -6     31     23     -2
      54     39    137    104     78
     -12     22     21     -6    -40
     -22      9    -51    -43    -14
receiveM=inv(A)*C                                          %命令 inv 求矩阵逆
                                                            %利用逆矩阵解密
```

【例 1.30】（方阵的幂）有如下网络

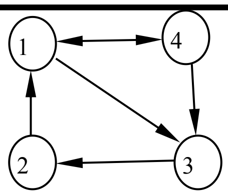


图 1-1

图 1 为 1，2，3，4 四个城市之间的空运航线，用有向图表示,求经过一次转机（也就是坐两次航班）能到达的城市.

【解】该图可以用下列邻接矩阵表示：

能力培养
培养学生计算能力，分析能力，知识运用能力

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

其中，第i行描述从城市i出发，可以到达各个城市的情况，若能到达第j个城市，记$a_{ij}=1$，否则$a_{ij}=0$，规定$a_{ii}=0$（其中$i,j=1,2,3,4$）. 如第 2 行表示：从城市 2 出发可以到达城市 1 而不能到达城市 2、3 和 4.

经过一次转机（也就是坐两次航班）能到达的城市，可以由邻接矩阵的平方 $A_2=A_1^2$ 来求得.

$$A_2=A_1\cdot A_1=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

其中第 2 行表示：从城市 2 出发经一次转机可以到达城市 3 和城市 4 而不能到达城市 1 和 2.

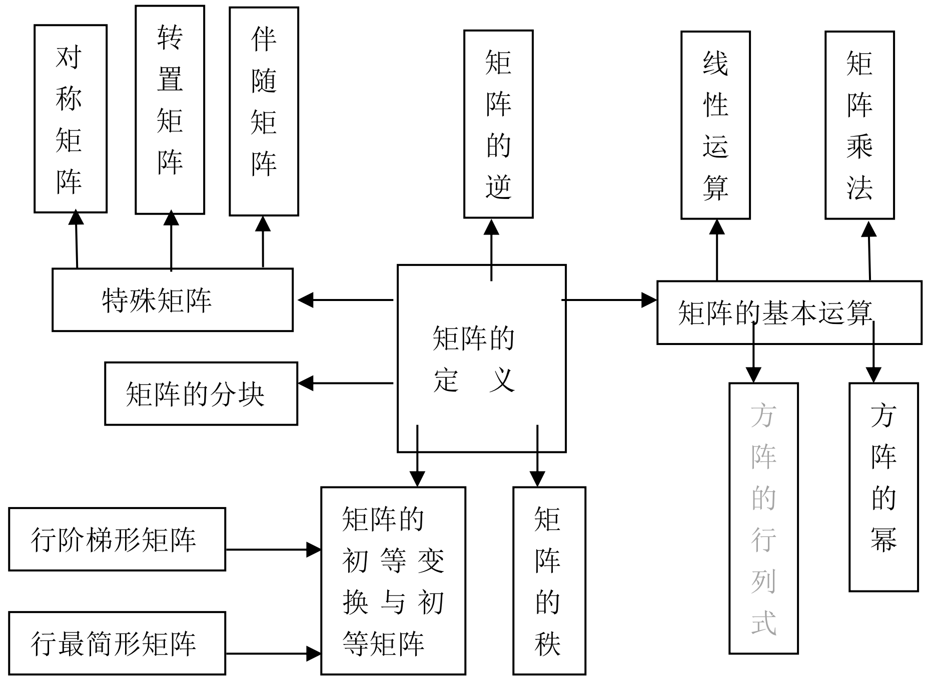
在 MATLAB 命令窗口中输入

```
A1=[0 0 1 1;1 0 0 0;0 1 0 0;1 0 1 0];          % 输入邻接矩阵 A
A2=A1^2                                          % 求 A^2
A2 =                                             % 经过一次转机能到达的城市
     1     1     1     0
     0     0     1     1
     1     0     0     0
     0     1     1     1
```

能力培养
培养学生分析问题能力和计算能力

第一章 知识点复习

一、知识点网络图



二、考点归纳

1. 矩阵的概念

$m\times n$ 个元素 a_{ij}（$i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$）排成的 m 行 n 列的数表，称为 $m\times n$ 阶的矩阵，记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

也简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

（1）当 $m=n$ 时，称矩阵 A 为 n 阶方阵.
（2）当 $m=1$ 时，称矩阵 A 为行矩阵.
（3）当 $n=1$ 时，称矩阵 A 为列矩阵.
（4）当 $a_{ij}=0$（$i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$）时，称矩阵 A 为零矩阵．记作 $0_{m\times n}$.

【温馨提示】矩阵与行列式是两个不同的概念：矩阵是数表，行数和列数可以不同．而行列式是数值，行数和列数必须相同.

2. 矩阵的运算

（1）矩阵的和与差：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$.

（2）数与矩阵的积：设 k 为任意实数，$A=(a_{ij})_{m\times n}$，则 $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$.

能力培养
培养学生知识总结能力

一般的，矩阵相加与数乘矩阵合起来,统称为矩阵的线性运算.

（3）矩阵与矩阵的积：设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$， $B=(b_{ij})_{s\times n}$，则 $AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\ ,\quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\ .$$

3. 转置矩阵

（1）定义：将 $m\times n$ 型矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行与列互换，而得到的 $n\times m$ 型矩阵 A 的转置矩阵，记作 A^T.

（2）运算规律：

①$(A^T)^T=A$．②$(kA)^T=kA^T$．③$(A+B)^T=A^T+B^T$．④$(AB)^T=B^TA^T$．

【例】设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}$，求 $2A-B$， AB，BA，A^2.

【解】根据矩阵的线性运算，有

$$2A-B=2\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -8 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}.$$

根据矩阵的乘法，有

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 5\\ -20 & -10\end{pmatrix}=5A\ ,$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

【小结】由本例说明：①矩阵的乘法不满足乘法交换律，即 $AB\neq BA$．②两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵．③一个非零矩阵的平方可能是零矩阵．④矩阵乘法不满足消去律（如本例中 $AB=A^2$，但 $A\neq B$； $BA=5A$，但 $B\neq 5E$）．

4. 方阵

（1）方阵的行列式：由 n 阶方阵 A 的元素构成的行列式称为方阵 A 的行列式．记为 $|A|$.

（2）方阵行列式的性质：①$|A^T|=|A|$；②$|kA|=k^n|A|$， k 为任一实数；③$|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$，其中 A,B 为同阶的方阵.

（3）方阵的幂：若 A 是 n 阶矩阵，则 A^k 为 A 的 k 次幂，即 $A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k}$，并且 $A^mA^k=A^{m+k},\left(A^m\right)^k=A^{mk}$.

能力培养

培养学生知识总结能力

【小结】从本题我们知道，矩阵的运算规律与数的运算规律的本质区别主要还是由于矩阵乘法不满足交换律和消去律的问题。特别注意下列情况是成立的：

① $(E+A)^m=E+C_m^1A+\cdots+C_m^kA^k+\cdots+A^m$.

② $E^k\pm A^k=\left(E\pm A\right)\left(E^{k-1}\mp E^{k-2}A+E^{k-3}A^2\mp\cdots\mp A^{k-1}\right)$.

8. 伴随矩阵

（1）定义：将行列式$|A|$的n^2个代数余子式排成下列n阶矩阵，并记为A^*，即

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$

则A^*称为矩阵A的伴随矩阵，其中A_{ij}是$|A|$中元素a_{ij}的代数余子式.

（2）伴随矩阵的万能公式：$AA^*=A^*A=|A|E$.

9. 逆矩阵

（1）定义：设A,B是n阶方阵，E为n阶单位矩阵，如果$AB=BA=E$，则称A是可逆矩阵，并称B是A的逆矩阵. 记作$A^{-1}=B$

（2）求逆矩阵的公式：设A为n阶方阵，A^*为A的伴随矩阵，则当$|A|\neq0$时有，

$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$.

【例】求$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},(ad-bc\neq0)$的逆矩阵.

【解】因为$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc\neq0$，所以$A$可逆. 而$A_{11}=d,A_{12}=-c,A_{21}=-b,A_{22}=a$. 所以$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$. 故$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$.

【小结】二阶矩阵A的逆矩阵符合：“两调一除”规律. 即先将矩阵A的主对角元素调换其位置，再将次对角元素调换其符号，最后用$|A|$去除A的每一个元素，即可得A的逆矩阵.

（3）逆矩阵的性质：

①若矩阵A可逆，则其逆矩阵A^{-1}是惟一的.

②若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$． ③若 A 可逆，则 A^{T} 是可逆，且 $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$． ④若 A 可逆，常数 $k\neq 0$，则 kA 也可逆，且 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$． ⑤若 A,B 为同阶可逆矩阵，则 AB 也可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$． ⑥若 A 可逆，则 $\left\|A^{-1}\right\|=\|A\|^{-1}$． ⑦若 A 可逆，且 $AX=B,YA=C$，则有 $X=A^{-1}B,Y=CA^{-1}$． ⑧ 若 A 可逆，则 $AB=0\Rightarrow B=0$；若 $AB=AC\Rightarrow B=C$． （4）逆矩阵存在的判定： ① 矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow \|A\|\neq 0$． ② 若 A,B 为同阶方阵，满足 $AB=E$，则 A 与 B 均可逆，且 $A^{-1}=B,B^{-1}=A$． 【小结 1】对于任一 n 阶矩阵 A，总有伴随矩阵 A^{*}，它并不依赖于 A 得可逆性． 【小结 2】在求解与 A^{*} 有关的问题是，常要考虑下面的等式： ① $AA^{*}=A^{*}A=\|A\|E$；② $\left(A^{*}\right)^{T}=\left(A^{T}\right)^{*}$；③ $\left\|A^{*}\right\|=\|A\|^{n-1}$；④若 A 可逆，$A^{*}=\|A\|A^{-1}$ 且 $\left(A^{*}\right)^{-1}=\frac{1}{\|A\|}A$；⑤ $(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$；⑥ $\left(A^{*}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{*}$；⑦ $(kA)^{*}=k^{n-1}A^{*}$．⑧ $\left(A^{*}\right)^{*}=\left(\|A^{*}\|(A^{*})^{-1}\right)=\|A\|^{n-1}(A^{-1})^{*}=(\|A\|A^{-1})^{*}=A^{*}$． **<u>10. 分块矩阵</u>** 常用的分块矩阵的相关结论： （1）分块对角阵的逆：$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k^{-1} \end{pmatrix}$， 其中 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 均为可逆的方阵．	**能力培养** 培养学生分析问题能力和计算能力和概括总结能力

（2）分块反对角阵的逆：$A=\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_k & & & \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} & & & A_k^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$，

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 均为可逆的方阵.

（3）分块对角阵的行列式：$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_k|$，其中 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 均为方阵.

11．初等变换

（1）定义：矩阵的下列变换①互换矩阵的两行（列）；②某一行（列）乘以非零数 k；③某一行（列）加上另一行（列）的 k 倍，称为矩阵的初等行（列）变换. 矩阵的初等行变换及初等列变换统称为矩阵的初等变换.

（2）两矩阵的等价：如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B，则称矩阵 A 与 B 等价.

（3）行阶梯形矩阵特点：①可划出一条阶梯线，线的下方全为零；②每个台阶只有一行，

台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线后面的第一个元素为非零元，即非零行的第一个非零元.

（4）行最简阶梯形：若已是行阶梯形矩阵，则还要求非零行的第一个非零元为 1，且这些非零元所在列的其余元素全为零.

（4）任一矩阵可以通过有限次初等行变换化为行阶梯形矩阵或最简行阶梯形.

12．初等矩阵

（1）定义：n 阶单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵. 因此对应于三种初等变换，应有三种初等矩阵.

（2）初等矩阵的逆矩阵：初等矩阵是可逆的，逆矩阵仍为初等矩阵. 且

$E(i,j)^{-1}=E(i,j)$ ；$E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$；$E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$.

（3）初等矩阵的转置矩阵：初等矩阵的转置仍是初等矩阵.

$E(i,j)^T=E(i,j)$ ；$E(i(k))^T=E(i(k))$；$E(ij(k))^T=E(ji(k))$.

（4）初等矩阵的行列式：$|E(i,j)|=-1$；$|E(i(k))|=k\neq 0$；$|E(ij(k))|=1$.

13. 初等矩阵的应用

（1）初等矩阵与初等变换的关系：对于一个 $m\times n$ 矩阵 A 作一次初等行（列）变换，相当于在 A 的左（右）面乘上一个对 $m(n)$ 阶单位矩阵 E 作同样初等变换得到的初等矩阵.

（2）① $(A \mid E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E \mid A^{-1})$. ② $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}\xrightarrow[\text{初等列变换}]{}\begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$.

14. 矩阵的秩

（1）秩的定义：若 $m\times n$ 矩阵 A 中至少有一个 r 阶子式不等于零，而所有 $r+1$ 阶

子式都等于零，则称矩阵 A 的秩为 r，记为 $r(A)=r$. （2）秩的计算：将 $m\times n$ 矩阵 A 经过一系列初等行变换化为阶梯形矩阵，阶梯形矩阵中非零行的个数就等于 A 的秩. （3）秩的重要结论： （1）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 $0\le r(A)\le \min(m,n)$. （2）$A\ne 0\Leftrightarrow r(A)\ge 1$. （3）$A$ 中存在 r 阶子式不等于零 $\Leftrightarrow r(A)\ge r$. （4）$r(A_n)=n\Leftrightarrow \|A\|\ne 0$. 即矩阵是满秩矩阵的充分必要条件是该矩阵可逆. （5）$r(A_n)<n\Leftrightarrow \|A\|=0$. （6）$r(A^T)=r(A)$. （7）初等变换不改变矩阵的秩. （8）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，P 为 m 阶可逆矩阵，Q 为 n 阶可逆矩阵，则 $$r(PAQ)=r(PA)=r(AQ)=r(A).$$ (9) $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$. (10) $r(A+B)\le r(A)+r(B)$. (11) 若 $A_{m\times n}B_{n\times k}=0$，则 $r(A)+r(B)\le n$. (12) $r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n, \\ 1, & r(A)=n-1, \\ 0, & r(A)<n-1. \end{cases}$ 典型例题讲解：（对课件中的例题部分课上讲解，部分视频讲解） **三、真题点击** 题型一　有关矩阵的乘法运算 【例 6】（2005）已知 X 为 n 维单位列向量，X^T 为 X 的转置，E 为单位矩阵，如 $G=XX^T$，则 $G^2=$【　　】.	**能力培养** 培养学生逻辑思维能力

$\mathbf{A}.G$ $\quad$ $\mathbf{B}.\pm G$ $\quad$ $\mathbf{C}.1$ $\quad$ $\mathbf{D}.E_n$ 【答案】A.本题考察矩阵乘法的结合律或秩为 1 的矩阵的性质．提示：常见规律有,若 $A=\alpha\beta^T$，则 $A^k=\left(\alpha\beta^T\right)\left(\alpha\beta^T\right)\cdots\left(\alpha\beta^T\right)=\alpha\left(\beta^T\alpha\right)^{k-1}\beta^T=\left(\beta^T\alpha\right)^{k-1}\alpha\beta^T$ $=\left(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\right)^{k-1}A$. 【例 7】（2006）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵．若三阶矩阵 Q 满足关系 $\boldsymbol{AQ+E=A^2+Q}$, 则 Q 的第 1 行的行向量是【　　】. $\mathbf{A}.(1\quad 0\quad 1)$ $\mathbf{B}.(1\quad 0\quad 2)$ $\mathbf{C}.(2\quad 0\quad 1)$ $\mathbf{D}.(2\quad 0\quad 2)$ 【答案】C. 本题考察矩阵方程的化简运算.提示：用选择题技巧做法快速解答： $\boldsymbol{AQ+E=A^2+Q\Rightarrow ax+1=a^2+x\Rightarrow (a-1)x=a^2-1\Rightarrow x=a+1}$， $\boldsymbol{\Rightarrow Q=A+E\Rightarrow}$ Q 的第 1 行的行向量是$(1\quad 0\quad 1)+(1\quad 0\quad 0)=(2\quad 0\quad 1)$. 【例 8】（2008）设 β 是 3 维列向量，β^T 是 β 的转置，若 $\boldsymbol{\beta\beta^T}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&2\\-2&2&4\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\beta^T\beta}=$【　　】. $\boldsymbol{A}.\mathbf{12}$ $\quad$ $\boldsymbol{B}.\mathbf{8}$ $\quad$ $\boldsymbol{C}.\mathbf{6}.$ $\quad$ $\boldsymbol{D}.\ \mathbf{4}$ 【答案】C.本题考察矩阵乘法的定义或者秩为 1 的矩阵的性质．提示：常见规律有,若 $A=\alpha\beta^T$，则 $\beta^T\alpha=\alpha^T\beta=A$ 的主对角元素之和$=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$. 【例 9】（2011）在$\left(x_1\quad x_2\quad x_3\right)\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&4&-1\\0&-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$的展开式中，$x_2x_3$ 项的系数是（　　）. $\mathbf{A}.3$ $\mathbf{B}.2$ $\mathbf{C}.-2$ $\mathbf{D}.-4$ 【答案】D. 本题考察矩阵的乘法运算．提示：一般规律是，$x_ix_j\leftrightarrow a_{ij}+a_{ji}$.因为根据矩阵的乘法，有如下成立.	**能力培养** 培养学生分析问题能力和计算能力

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 .$$

题型二　有关矩阵逆矩阵的题目

【例 10】（2004）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}^{-1}$，　则矩阵 C^{-1} 中，第 3 行第 2 列的元素是【　　】.

A. $\frac{1}{3}$　　**B.** $\frac{1}{2}$　　**C.** 1　　**D.** $\frac{3}{2}$

【答案】B. 本题考察逆矩阵性质、常见分块矩阵的逆、二阶矩阵的逆、矩阵乘法原理. 提示：由于 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}^{-1}\Rightarrow \boldsymbol{C}^{-1}=(\boldsymbol{AB}^{-1})^{-1}=(\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}$，因 B 的第 3 行元素 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，只需求 A^{-1} 的第 2 列，根据分块矩阵的和二阶矩阵逆矩阵的两调一除，立即可得 $\begin{pmatrix} * \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$，因此所求为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}$.

【例 11】（2009）已知 $A=\left(a_{ij}\right)$ 是三阶矩阵，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，若 $\boldsymbol{a}_{11}=-1$，$b=\left(1,0,0\right)^T$，则方程组 $Ax=b$ 的解是

A. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　**B.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　**C.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$　**D.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

【答案】D. 本题考察矩阵的乘法运算及其简单矩阵方程的化简运算. 提示：由

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\Rightarrow \boldsymbol{AA}^T=\boldsymbol{E}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=$$

若 $\boldsymbol{a}_{11}=-1$，则必有 $\boldsymbol{a}_{12}=\boldsymbol{a}_{13}=0$，于是

$$Ax=b\Rightarrow A^TAx=A^Tb\Rightarrow x=A^Tb=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

【例 12】（2011）对任意的 n 阶矩阵 A,B,C，若 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$（$E$ 是单位矩阵），则下列 5 式 **(i)** $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$　**(ii)** $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$　**(iii).** $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$　**(iv)** $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$　**(v)** $\boldsymbol{CAB}=\boldsymbol{E}$

能力培养
化具体为抽象，培养学生逻辑思维能力

能力培养
培养学生

中恒成立的有 **A.1　　B.2　　C.3　　D.4** 【答案】B. 本题考察逆矩阵的判定和定义. 提示：常见规律有，若 n 个方阵满足 $A_1A_2\cdots A_n=E$，则有 $A_iA_{i+1}\cdots A_nA_1A_2\cdots A_{i-1}=E$.	分析问题能力和计算能力
题型三　有关矩阵秩的题目 【例 13】（2003）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{3}&\mathbf{1}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$，则必有【　　】. **A.** $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$　**B.** $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$　**C.** $\lvert\boldsymbol{BA}\rvert=\mathbf{-8}$　**D.** $\lvert\boldsymbol{AB}\rvert=\mathbf{0}$ 【答案】D. 本题考察两矩阵可乘的条件、两矩阵乘积秩的重要结论、秩的概念、方阵的行列式的性质. 提示 1：$B_{2\times3}A_{3\times2}=\left(BA\right)_{2\times2}\Rightarrow\lvert BA\rvert=0\Rightarrow\lvert AB\rvert=0$. 【例 14】(2010 年真题)已知 $A=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&a&1\\-1&3&0\end{pmatrix}$. 若矩阵 $AB+B$ 的秩为 2，则 $a=$【　　】. **(A)** -5；　**(B)** $\mathbf{-1}$；　**(C)** 1.　**(D)** 5. 【答案】A. 本题考察矩阵的乘法运算、秩的重要结论、秩的初等变换求法. 提示：注意到 $AB+B=\left(A+E\right)B$，且 $\lvert A+E\rvert\neq0\Rightarrow A+E$ 可逆，从而根据矩阵乘以可逆矩阵秩不变性质，可得 $r\left(B\right)=r\left(AB+B\right)=2$；又对 B 施行初等变换化为行阶梯形，$B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&a&1\\-1&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&a+2&-3\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&1\\0&0&-a-5\end{pmatrix}$，故必有 $a=-5$.	
【例 15】（2004）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-2}&\mathbf{2}\\\mathbf{-2}&\mathbf{6}&\boldsymbol{x}\\\mathbf{3}&\mathbf{0}&\mathbf{-6}\end{pmatrix}$，三阶矩阵 $B\neq0$，且满足 $AB=\mathbf{0}$，则【　　】. **A.** $\boldsymbol{x}=\mathbf{-8},\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})=\mathbf{1}$　**B.** $\boldsymbol{x}=\mathbf{-8},\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})=\mathbf{2}$　**C.** $\boldsymbol{x}=\mathbf{8},\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})=\mathbf{1}$　**D.** $\boldsymbol{x}=\mathbf{8},\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})=\mathbf{2}$ 【答案】A. 本题考察非零矩阵和 $AB=0$ 时秩的有关结论、矩阵的初等变换求秩法. 提示：	**能力培养** 培养学生分析问题能力和逻辑思维能力和计算能力

$\begin{cases} AB=\mathbf{0} \Rightarrow r(A)+r(B)\le 3 \\ B\ne \mathbf{0} \Rightarrow r(B)\ge 1 \end{cases} \Rightarrow 1\le r(B)\le 3-r(A)$，而

$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & x \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & x+4 \\ 0 & 6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & x+4 \\ 0 & 0 & -3x-24 \end{pmatrix}$，显然当 $-3x-24=0$，

即 $x=-8$ 时，$r(A)=2$，此时 $1\le r(B)\le 3-r(A)\le 1$，故 $r(B)=1$.

三、回顾和小结

1．应用案例讲解；

2．第一章知识复习；

3.典型习题讲解；

四、复习思考与作业

思考题：高斯消元法是如何用矩阵来实现的？想想还有没有其他的工具可以方便地求解未知数个数=方程个数的线性方程组的解呢？

作业题：

北化在线平台测试

Mooc 平台单元测试

第（6）次课

教学章节	第二章第 2.1,2.2 节	学时	2 学时
教材和参考书	1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书） 2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书） 3. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考） 4. Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra，Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考） 5. Jim Hefferon，Linear Algebra，available for free online，2014. （教学参考）		

<table>
<tr><td></td><td>6. 黄廷祝,成孝予，线性代数与空间解析几何,高等教育出版社,2008.（教学参考）
刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. 教学目的：熟练掌握2阶,3阶行列式的计算；掌握逆序数的定义，计算；掌握n阶行列式的定义；掌握对换的概念；掌握n阶行列式的性质，会利用n阶行列式的性质计算n阶行列式的值；培养学生逻辑推理能力及抽象思维能力。
2. 教学重点：逆序数的计算；n阶行列式的性质。
3. 教学难点：逆序数的计算，利用n阶行列式的性质计算n阶行列式的值。</td></tr>
<tr><td colspan="2">1.教学内容：
二、三阶行列式的定义；全排列及其逆序数；n阶行列式的定义，对换；行列式的性质
2.时间安排：3学时；
3.教学方法：讲授与讨论相结合；
4.教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc平台讨论+测试。</td></tr>
<tr><td colspan="2">教学设计：
课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析）：
1.北化在线平台2.1视频学习；
2.矩阵作为求解方程组的解的工具，是如何运用关于高斯消元法的？当未知数个数=方程个数时，方程组的公式解，你又什么好办法记住它吗？
课中检测，并探讨重点、难点知识点
1.通过2阶、3阶行列式定义，引导学生找出行列式定义中的规律；
2.行列式是一种速记符号，它如何实现速记的？
3.行列式的里面是什么？矩阵的初等变换有哪三种？行列式的性质中，数表的变化是什么？
课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况）
1.布置书后作业，北化在线平台提交；
2.在北化在线平台完成课后测试；
3.在微信群、企业微信群、MOOC平台、线下随时回答解决同学的问题；</td></tr>
</table>

基本内容	教学反思

第一节 行列式的定义

一、 案例导引：

二元方程组的解的公式

设二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

用消元法,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,解得

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

二、 浸入式学习与价值引领

1. 二、三阶行列式的定义

令 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,称为二阶行列式 ,则

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

如果将 D 中第一列的元素 a_{11}, a_{21} 换成常数项 b_1, b_2 ,则可得到另一个行列式,用字母 D_1 表示,于是有

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

按二阶行列式的定义,它等于两项的代数和：$b_1a_{22} - b_2a_{21}$,这就是 x_1 的表达式的分子。同理将 D 中第二列的元素 a_{12},a_{22} 换成常数项 b_1,b_2 ,可得到另一个行列式,用字母 D_2 表示,于是有

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

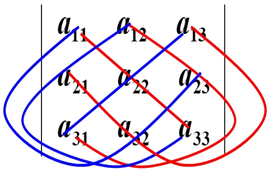
按二阶行列式的定义,它等于两项的代数和：$a_{11}b_2 - a_{21}b_1$,这就是 x_2 的表达式的分子。

于是二元方程组的解的公式又可写为

前测+能力培养：

消元法求二元线性方程组的解，如何能把公式解背下来呢？培养学生思考解决问题的方法及逻辑思维能力。

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{cases} \quad 其中 D \neq 0$$ 设三元线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ 用消元法解得 $$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}},$$ $$x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}},$$ $$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$ 分母同样可以用行列式来描述，下面给出三阶行列式的定义。 定义 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表 $$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$ 记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$，称为三阶行列式,则 当 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，方程组有解 $$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D}.$$ 其中 $D_j\ (j = 1,2,3)$ 是由常数项 b_1, b_2, b_3 替换 D 中的第 j 列得到的的三阶行列式，即 $$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$	**能力培养：** 培养学生思考解决问题的方法及逻辑思维能力。



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

【例 2.1】 利用行列式求解线性方程组 $\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=1, \\ x_1+2x_2+\ \ x_3=2, \\ x_1+2x_2+2x_3=3. \end{cases}$

【解】 该方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=4+2+1-2-2-2=1\neq 0,$$

且有

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-1,\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=1,\ D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=1,$$

因此，所求线性方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=1,\ x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

2. 排列与逆序

(1) 全排列

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（简称排列）.

可将 n 个不同元素按 $1\sim n$ 进行编号，则 n 个不同元素的全排列可看成这 n 个自然数的全排列.

n 个不同元素的全排列共有 $n!$ 种.

(2) 逆序及逆序数

取一个排列为标准排列，其它排列中某两个元素的次序与标准排列中这两个元素的次序相反时，则称有一个逆序.

通常取从小到大的排列为标准排列，即 $1\sim n$ 的全排列中取 $123\cdots(n-1)n$ 为标准排列.

一个排列中所有逆序数的总数称为这个排列的逆序数.

逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列，标准排列规定为偶排列.

逆序数的计算：设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 $123\cdots(n-1)n$ 的一个全排列，则其逆序数为

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i.$$

能力培养
带领学生一起挖掘二阶、三阶行列式的特点，得出 n 阶行列式定义。

其中t_i为排在p_i 前,且比p_i大的数的个数. 定理2.1 对换改变排列的奇偶性，即作一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列. **(3) n阶行列式的定义** n阶行列式 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$ $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{l_1l_2\cdots l_n} (-1)^{\tau(l_1l_2\cdots l_n)} a_{l_11}a_{l_22}\cdots a_{l_nn}$$ 其中$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有n级排列$j_1j_2\cdots j_n$求和，$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$称为行列式的一般项.特别地，当$n=1$时，$\lvert a_{11}\rvert = a_{11}$；当$n=2,3$时，即为前述的二阶，三阶行列式 【例2.2】计算行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，其中$a_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,n$. 【解】 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 上三角行列式的值等于其主对角线元素乘积，这一结论对于下三角行列式也成立，即有 $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$ 特别地，有	**能力培养** 动画展示如何选取元素，帮助学生理解用定义如何计算的n阶行列式值，培养学生计算能力。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

上述主对角线以外的元素全为零的行列式称为对角行列式.

第二节 n阶行列式的性质

一、 **案例导引：**

对角线法则计算二、三阶行列式；
上三角、下三角、对角行列式的值也方便求解；
计算下列行列式的值：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 9 \\ 1 & 9 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & 5 \\ 1 & 9 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

前测+思政元素

复习计算低阶和特殊行列式的值，四阶及以上行列式，按定义，计算太麻烦！行列式中的元素为党史大事件发生的年代！

浸入式学习与价值引领

二、 1. **转置行列式**

将行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行和列互换得到新的行列式，记为

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为行列式D的转置行列式，记为D^T. 显然有$(D^T)^T = D$.

性质 1： 行列式与它的转置行列式相等.

由此知，行与列具有同等地位. 关于行的性质，对列也同样成立，反之亦然.

如：$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ $D^T = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

以 r_i 表示第 i 行，c_j 表示第 j 列. 交换 $\boldsymbol{i,j}$ 两行记为 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i, j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$. 性质 2：行列式互换两行（列），行列式变号. 推论：行列式有两行（列）相同，则此行列式为零. 性质 3：行列式的某一行（列）的所有元素乘以数 k，等于用数 k 乘以该行列式. 推论：行列式的某一行（列）所有元素的公因子可以提到行列式符号外. 性质 4：行列式中有两行（列）的元素对应成比例，则此行列式为零. 性质 5：若行列式中某一行（列）的元素都是两数之和，则此行列式等于两个行列式之和. 即若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 则 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. 性质 6：将行列式的某行（列）元素的 k 倍对应地加到另一行（列），则行列式的值不变，即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. 【例 2.3】计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 【解】	**能力培养** 课堂互动环节：行列式的性质根矩阵的初等变换之间有什么关系？培养学生逻辑思维能力。

$$D=\begin{vmatrix}3&6&12\\2&-3&0\\5&1&2\end{vmatrix}\xlongequal{\frac{1}{3}r_1}3\begin{vmatrix}1&2&4\\2&-3&0\\5&1&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-5r_1]{r_2-2r_1}3\begin{vmatrix}1&2&4\\0&-7&-8\\0&-9&-18\end{vmatrix},$$ $$=27\begin{vmatrix}1&2&4\\0&7&8\\0&1&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-27\begin{vmatrix}1&2&4\\0&1&2\\0&7&8\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-7r_2}-27\begin{vmatrix}1&2&4\\0&1&2\\0&0&-6\end{vmatrix}=162.$$ **三、　回顾和小结** 1. 二三阶行列式的定义； 2. 全排列及其逆序数； 3. n阶行列式的定义； 4. 行列式性质。 **四、 复习思考与作业** **思考题：**在北化在线平台提交。 1. 计算 $\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\-1&0&3&\cdots&n-1&n\\-1&-2&0&\cdots&n-1&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&-2&-3&\cdots&0&n\\-1&-2&-3&\cdots&-(n-1)&0\end{vmatrix}$ **作业题：** 2.1：2（1）、4、6 2.2：2（1）（2）、3（1）（3）	**能力培养** 培养学生的计算能力。

第（ 7 ）次课

教学章节	第二章　第 2.2, 2.3 节	学时	2 学时

<table>
<tr><td>教材和
参考书</td><td>1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书）
2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书）
3. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考）
4. Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra，Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
5. Jim Hefferon，Linear Algebra，available for free online，2014. （教学参考）
6. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考）
刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. 教学目的：掌握用行列式的性质求解行列式值；了解余子式和代数余子式的概念；掌握行列式按行（列）展开；
2. 教学重点：行列式性质的应用，行列式按行（列）展开；
3. 教学难点：应用行列式性质和行列式按行（列）展开求行列式值.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. 教学内容：行列式性质，行列式按行（列）展开；
2. 时间安排：2 学时；
3. 教学方法：讲授与讨论相结合；
4. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，MOOC 平台讨论+测试。</td></tr>
<tr><td colspan="2">教学设计：
课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析）：
1.复习行列式的性质；
2.探寻 2、3 阶行列式的各项和还有没有其他表达方式。
课中检测，并探讨重点、难点知识点
多种形式的课堂讨论：
①启发式提问引起课堂讨论：行列式性质求行列式值时，目标是什么，和矩阵初等变换化阶梯型矩阵有什么联系？
②提问预习结果：2、3 阶行列式的各项和提取公因子后能得到什么？</td></tr>
</table>

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况） 1.布置书后作业，北化在线平台提交； 2.在北化在线平台完成课后测试； 3.在微信群、企业微信群、MOOC 平台、线下随时回答解决同学的问题；	
基本内容	教学反思

第二节　行列式性质

一、知识点回顾

(1) 转置不变（所以下面的各条性质对列也成立）.

(2) 换行反号（即交换某两行，则行列式知反号）.

(3) 同行得零（即某两行相同的行列式值为零，此为（2）之推论）.

(4) 倍提性质（即某一行所有元素都乘以同一数k，等于用k乘此行列式）.

(5) 零行得零（即有一行元素全为零的行列式值为零）.

(6) 行成比例值为零（由（3）、（4）即知）.

(7) 拆分性质（即某一行元素按均是两数之和，则可拆分为两个行列式之和）.

(8) 倍加不变（即将某行的倍数加到另一行，行列式值不变）.

二、典型例题

【例 2.4】计算行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

【解】

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

仿照上述方法可得到更一般的结果：

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

【例 2.5】设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$, $D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$, $D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$, 证明 $D=D_1D_2$. 【证】对 D_1 作运算 r_i+kr_j，把 D_1 化为下三角形行列式，有 $D_1=\begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk}$. 对 D_2 作运算 c_i+kc_j，把 D_2 化为下三角形行列式，有 $D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn}$. 于是，对 D 的前 k 行作运算 r_i+kr_j，再对后 n 列作运算 c_i+kc_j，把 D 化为下三角形行列式，即 $D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}$. 因此可得 $D=p_{11}\cdots p_{kk}q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2$. 第三节　行列式按行（列）展开 **一、　案例导引:** 我们在给出 n 阶行列式的定义时，是通过对二、三阶行列式的值进行分析，归纳得出的结果。那么我们再来看看三阶行列式，它还可以写成什么形式呢？	**能力培养** 培养学生的计算能力。 **前测:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

简化行列式计算的另一种主要方法是降阶，即把较高阶的行列式的计算转化为较低阶的行列式的计算，降阶所用的基本方法是把行列式按一行（列）展开.

二、 浸入式学习与价值引领

1. 余子式与代数余子式定义

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所处的第 i 行、第 j 列划去，剩下的元素按原排列构成的 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}；而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式.

2. 行列式按行（列）展开法则

定理 2.2 行列式等于它的任意一行（列）的各元素与对应的代数余子式乘积之和，即

按行： $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i \neq j)$

按列： $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i \neq j)$

定理 2.3 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

请同学们试着写出三阶行列式的其他表达形式，雨课堂回答。培养学生思维能力。

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0, \quad i\neq j.$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0, \quad i\neq j.$$

【证】 只需证行的情形. 在行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中将第 j 行元素都换成第 i 行元素，得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

显然 D_1 的第 j 行元素的代数余子式与 D 的第 j 行元素的代数余子式完全相同. 将 D_1 按第 j 行展开，并注意到 D_1 有两行完全相同，得到

$$D_1=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,$$

综上可得，代数余子式有如下性质：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

推论 行列式一行（列）的各元素与另一行（列）对应各元素的代数余子式乘积之和为零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$$

按列： $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j)$

结合定理及推论，得

$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij},\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}$，，其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1,(i=j)\\0(i\neq j)\end{cases}$.

【例 2.6】计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}$.

【解】利用行列式的性质将第一列消出尽可能多的零元素，得

$$\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+ar_2}\begin{vmatrix}0&1+ab&a&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}.$$

此时第一列仅含一个非零元素，将行列式按第一列展开，得

$$\begin{vmatrix}0&1+ab&a&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}=(-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1+ab&a&0\\-1&c&1\\0&-1&d\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+dc_2}\begin{vmatrix}1+ab&a&ad\\-1&c&1+cd\\0&-1&0\end{vmatrix}$$

$=abcd+ab+cd+ad+1.$

【例 2.7】 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x&y&0&\cdots&0&0\\0&x&y&\cdots&0&0\\0&0&x&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&x&y\\y&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}$，其中 $n\geq 2$.

【解】将行列式按第一列展开，得

$$D_n=x\begin{vmatrix}x&y&0&\cdots&0&0\\0&x&y&\cdots&0&0\\0&0&x&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&x&y\\0&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix}y&0&0&\cdots&0&0\\x&y&0&\cdots&0&0\\0&x&y&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&y&0\\0&0&0&\cdots&x&y\end{vmatrix}$$

课堂讨论
同学们小组讨论，行列式按什么样的一行或一列展开计算量最小？能够将一个行列式化成易于展开的形式吗？慕课平台回答讨论结果。

能力培养
请同学们观察，照到该行列式的特点，如何展开？培养逻辑思维能力。

$=x^n+(-1)^{n+1}y^n$.

【例 2.8】. 证明范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 1}\left(x_i-x_j\right).$$

其中，记号“$\prod$ ”表示全体同类因子的乘积.

证　用归纳法

因为 $D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{2\geq i>j\geq 1}\left(x_i-x_j\right)$

所以，当 $\boldsymbol{n=2}$ 时，（4）式成立.

现设（4）式对 $\boldsymbol{n-1}$ 时成立，要证对 $\boldsymbol{n}$ 时也成立. 为此，设法把 D_n 降阶；从第 $\boldsymbol{n}$ 行开始，后行减去前行的 x_1 倍，有

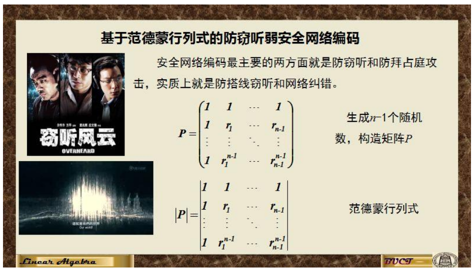
$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2\left(x_2-x_1\right) & x_3\left(x_3-x_1\right) & \cdots & x_n\left(x_n-x_1\right)\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & x_2^{n-2}\left(x_2-x_1\right) & x_3^{n-2}\left(x_3-x_1\right) & \cdots & x_n^{n-2}\left(x_n-x_1\right)\end{vmatrix}$$

（按第一列展开，并提出因子 x_i-x_1）

$$=\left(x_2-x_1\right)\left(x_3-x_1\right)\cdots\left(x_n-x_1\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}\left(n-1\right)\text{阶范德蒙行列式}$$

$$\overset{\text{由假设}}{=}\left(x_2-x_1\right)\left(x_3-x_1\right)\cdots\left(x_n-x_1\right)\prod_{n\geq i>j\geq 2}\left(x_i-x_j\right)=\prod_{n\geq i>j\geq 1}\left(x_i-x_j\right)$$

思政元素：范德蒙行列式与通信安全



一、　回顾和小结

1. 复习行列式的性质

2. 余子式和代数余子式的概念；

3. 行列式按行（列）展开；

四、　复习思考与作业

思考题：

设：$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$,

求第一行各元素的代数余子式之和

作业题：

习题 2.3:4（2）（4）;5(1)(3)(5)

第（ 8 ）次课

教学章节	第二章　第 2.4, 2.5 节	学时	2 学时

<table>
<tr><td>教材和
参考书</td><td>7. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书）
8. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书）
9. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考）
10. Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
11. Jim Hefferon，Linear Algebra，available for free online，2014. （教学参考）
12. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考）
刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. 教学目的：了解克拉默法则的内容，了解克拉默法则的证明，会利用克拉默法则求解含有 n 个未知数 n 个方程的线性方程组的解；培养学生逻辑推理能力及抽象思维能力；了解方阵的行列式，方阵的行列式满足下列运算性质；伴随矩阵的概念，可逆的判定，利用伴随矩阵求逆矩阵，培养学生逻辑推理能力及抽象思维能力；。
2. 教学重点：克拉默法则的应用；伴随矩阵，利用伴随矩阵求逆矩阵；
3.教学难点：克拉默法则的应用；利用伴随矩阵求逆矩阵.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. 教学内容：克拉默法则；方阵的行列式。
6. 时间安排：2 学时；
7. 教学方法：讲授与讨论相结合；
8. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc 平台讨论+测试。</td></tr>
<tr><td colspan="2">教学设计：
课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析）：
1.行列式的产生原因；
2.为什么学习行列式的性质？
3.行列式符号里面的数表是什么形状的，本质是什么？
课中检测，并探讨重点、难点知识点
多种形式的课堂讨论：</td></tr>
</table>

①启发式提问引起课堂讨论：行列式的特点是什么，它对应什么样的方程组？

②提问预习结果：是否只有方阵才有对应的行列式值？

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况）

1.布置书后作业，北化在线平台提交；

2.在北化在线平台完成课后测试；

3.在微信群、企业微信群、MOOC 平台、线下随时回答解决同学的问题；

基本内容	教学反思

第四节　行列式与克莱姆法则

二、　案例导引：

在讨论未知数个数和方程个数相等的线性方程组的解时，我们引入了二阶、三阶行列式，并给出了方程组的解。那么 n 个未知数 n 个方程的线性方程组呢?如何用行列式进行求解?

含有 n 个未知数 $x_1, x_2, ..., x_n$ 的 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_2 = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

三、　浸入式学习与价值引领

1.　**克拉默法则**

定理 1（Cramer 法则）如果线性方程组(1)的系数行列式不等于零，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

则方程组(1)有且仅有一组解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} , x_2 = \frac{D_2}{D} , \cdots , x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j\left(j = 1,2,...,n\right)$ 是把系数行列式 D 中的第 j 列的元素用方程组右端的常数列代替，而其余列不变所得到的 n 阶行列式

前测：
还记得我们这一章的初衷吗？为什么中间去研究行列式性质和按行按列展开法则去了？请同学们画出本章的思维导图，慕课平台提交。

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

当 $b_1,b_2,...,b_n$ 全为零时，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

称之为齐次线性方程组. 显然 ，齐次线性方程组必定有解（$x_1=0,x_2=0,...,x_n=0$）.

根据克拉默法则，有

1．齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$ 时 ，则它只有零解（没有非零解）

2．反之，齐次线性方程组有非零解 ，则它的系数行列式 $D=0$.

【证】将方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$ 简写成

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i，\quad i=1,2,\cdots,n.$$

下面首先证明当 $D\neq 0$ 时，$x_j=\dfrac{D_j}{D}$，$j=1,2,\cdots,n$ 是方程组的解. 将 D_j 按第 j 列展开，得

$$D_j=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}=\sum_{s=1}^{n}b_sA_{sj}，\quad j=1,2,\cdots,n.$$

其中 A_{sj} 为 D 中 a_{sj} 元素的代数余子式，$s=1,2,\cdots,n$. 再将 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$，$j=1,2,\cdots,n$. 式代入 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 的第 i 个方程的左边，得

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{D_j}{D}=\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\sum_{s=1}^{n}b_sA_{sj})=\frac{1}{D}\sum_{s=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{sj})b_s=\frac{1}{D}D\,b_i=b_i，（i=1,2,\cdots,n）.$$

式 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$，$j=1,2,\cdots,n$. 为方程组的一个解. 现在证明解的唯一性：不妨设方

课堂互动

请同学思考讨论用克拉默法则求的方程组的解，解有几种可能？

程组的任意一个解为 $x_l=k_l$， $l=1,2,\cdots,n$， 于是有 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}k_j=b_i$ ， $i=1,2,\cdots,n$

依次用 $A_{1l},A_{2l},\cdots,A_{nl}$ 乘上式中的各式并相加，得

$$\sum_{i=1}^{n}A_{il}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}k_j)=\sum_{j=1}^{n}b_iA_{il}=D_l\,.$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{n}A_{il}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}k_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{il}a_{ij}k_j=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{il})k_j=k_lD\,,$$

因此有 $k_lD=D_l$，从而有 $k_l=\dfrac{D_l}{D}$， $l=1,2,\cdots,n$.

2. 用克拉默法则求解线性方程组

【例 2.9】求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3+2x_4=1, \\ x_1-3x_3+x_4=1, \\ x_1+6x_2+2x_3+4x_4=0, \\ 2x_1-2x_3+3x_4=1. \end{cases}$$

【解】方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}=21\neq 0\,,$$

于是由 Cramer 法则知该方程组有唯一解.由

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}=42\,,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=7\,,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0\,,\quad D_4=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-21\,,$$

得该方程组的唯一解为

$$x_1=2,\quad x_2=\frac{1}{3},\quad x_3=0,\quad x_4=-1.$$

【注】 克莱姆法则的意义主要在于建立了线性方程组的解和已知的系数以及常数项之间的关系．它主要适用于理论推导．注意：

1. 克莱姆法则的条件：$\boldsymbol{n}$个未知数，$\boldsymbol{n}$个方程，且$D\neq 0$
2. 用克莱姆法则求解方程组运算量大一般不采用它求解方程组。

第五节　行列式与方阵

一、　案例导引：

行列式是什么？是数，是速记符号。行列式符号，里面是什么？是方形数表，是方阵。二者有什么关系？

二、　浸入式学习与价值引领

1. 方阵的行列式定义

定义 设n阶方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，称$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$为矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式，记为$|\boldsymbol{A}|$或$\det \boldsymbol{A}$.

2. 运算性质

设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为n阶方阵，则方阵的行列式满足下列运算性质：

（1）$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$，其中$k$为常数；

（2）$|\boldsymbol{A}^T|=|\boldsymbol{A}|$；

（3）$|\boldsymbol{A}^n|=|\boldsymbol{A}|^n$，其中$n$为常数；

（4）当$\boldsymbol{A}$可逆时，$|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$；

（5）$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；

（6）设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为n阶方阵，$\boldsymbol{B}$为m阶方阵，则$\left|\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}\right|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

【证】下证性质（5）．设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，构造行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$D=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$. 记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{n\times n}$，即 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，其中 $i,j=1,2,\cdots,n.$ 根据行列式的性质可得

$$D_{2n}\xlongequal[j=1,2,\cdots,n]{c_{n+j}+\sum\limits_{k=1}^{n}c_k b_{kj}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix} -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^n|-\boldsymbol{E}||\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{C}|,$$

因此有 $|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，即 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ 成立.

性质（5）还可推广到多个同阶方阵相乘的情形：

$$\left|\prod_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\right|=\prod_{i=1}^{m}|\boldsymbol{A}_i|.$$

此外，关于初等矩阵的行列式，有如下性质：

（1）初等矩阵的行列式非零，且有 $\det\boldsymbol{E}_{ij}=-1$，$\det\boldsymbol{E}_i(c)=c\neq 0$，$\det\boldsymbol{E}_{ij}(k)=1$.

（2）若 $\boldsymbol{P}$ 为初等矩阵，则 $\det(\boldsymbol{PA})=\det\boldsymbol{P}\det\boldsymbol{A}$.

定义（奇异方阵）若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 不等于零，则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异方阵，否则称为奇异方阵.

3. 伴随矩阵与逆矩阵

定义　设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，称矩阵

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \left(A_{ij}\right)^T$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^*$，其中 A_{ij} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

定理　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

【证】 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} |\boldsymbol{A}| & & & \\ & |\boldsymbol{A}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\boldsymbol{A}| \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E},$$

同理可得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

定理　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

【证】必要性：因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，即存在 $\boldsymbol{A}^{-1}$，使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$，两边取行列式得

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{E}| = 1,$$

所以 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

充分性：当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 可得

$$\boldsymbol{A}\ \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

由可逆矩阵的定义可知 $\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

定理给出了求可逆矩阵的逆矩阵的一种重要方法，且指出方阵的行列式的值是刻画方阵可逆的一个重要工具. 显然,矩阵可逆的充要条件是它为非奇异矩阵.

【例 2.10】设矩阵 $A=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}$，问该矩阵是否可逆；若可逆，求出其逆矩阵.

【解】由于 $|A|=2\neq 0$，故 A 可逆. $|A|$ 中各元素的代数余子式分别为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2, A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3, A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=2$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\4&3\end{vmatrix}=6,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\3&3\end{vmatrix}=-6,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=2$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix}=-4,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=5,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}=-2.$$

从而得

$$A^*=\begin{vmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{vmatrix},$$

因此所求逆矩阵为

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{vmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{vmatrix}.$$

【例 2.11】设矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $A^*=A^T$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，A^T 为 A 的的转置矩阵. 若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等的正数，求 a_{11} 的值.

【解】由于 $A^*=A^T$，所以 $a_{ij}=A_{ij}$，又 $AA^*=|A|E$，$|A|^2=|A||A^T|=|A|^3$，

因为 $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=3a_{11}^2>0$，所以 $|A|=1$，即 $a_{11}^2=\frac{1}{3}$，故 $a_{11}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

三、　回顾和小结

1. 克莱姆法则。

2. 方阵的行列式.

3. 伴随矩阵的概念

4. 可逆判定及求逆矩阵.

四、复习思考与作业 **思考题：** 设：$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$, 求第一行各元素的代数余子式之和 **思考题：** 所有的可逆矩阵都可以用伴随矩阵求逆矩阵，但计算量较大，还记得有什么好方法吗？ **作业题：** 习题 2.5 第 1,2,3,5（2,4），6	

第（9）次课

教学章节	第二章第 2.6 节，第二章习题课	学时	2 学时
教材 和参考书	1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书） 2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书） 3. David. C. Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考） 4.Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra，Wellesley Cambridge Press，2009.（教学参考） 5. Jim Hefferon，Linear Algebra，available for free online，2014. （教学参考） 6. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考） 7. 刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）		

1. 教学目的：了解行列式的实际应用，了解数学软件计算行列式，第二章知识复习。

2. 教学重点：第二章复习；

3. 教学难点：特殊行列式的计算。

4. 教学内容：行列式的应用，行列式复习；

5. 时间安排：2 学时；

6. 教学方法：例证法、启发诱导法、讲授法与讨论相结合；

7. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，MOOC 平台讨论+北化在线测试。

教学设计：

课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析）：

1. 复习第二章内容；
2. 整理作业问题：
3. 做第二章思维导图

课中检测，并探讨重点、难点知识点

1. 第二章知识点复习，雨课堂完成第二章典型习题；

2. 翻转课堂

学生讲解作业（一题多解）

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况）

1. 布置书后作业，北化在线平台提交；
2. 在北化在线平台完成课后测试；
3. 在微信群、企业微信群、MOOC 平台、线下随时回答解决同学的问题；

基本内容	教学反思
2.6 行列式的应用及 MATLAB 计算举例 本节将给出二阶，三阶行列式的几何解释，即用二阶行列式求平行四边形的面积，用三阶行列式求平行六面体的体积. 在平面上，令向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_{11},a_{21})$，$\boldsymbol{\beta}=(a_{12},a_{22})$，则二阶行列式 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ 的绝对值在几何上表示由向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为邻边构成的平行四边形的面积. 事实上，由初等数学平面向量知识，平行四边形的面积为	**能力培养** 培养逻辑思维能力

和解决问题能力

$$S=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\sin\angle(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\sqrt{1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})^2}{|\boldsymbol{\alpha}|^2|\boldsymbol{\beta}|^2}}=\sqrt{|\boldsymbol{\alpha}|^2|\boldsymbol{\beta}|^2-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})^2}$$

$$=\sqrt{(a_{11}^2+a_{21}^2)(a_{12}^2+a_{22}^2)-(a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21})^2}$$

$$=\sqrt{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^2}=|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|=|D|.$$

令向量$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,y_3)$，$\boldsymbol{\gamma}=(z_1,z_2,z_3)$，则三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

的绝对值在几何上表示由向量$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$为棱的平行六面体的体积.一个平行六面体可以由它的过同一顶点的三条边完全确定，这三条边可以用顶点为起点的三个向量来表示，因而这三个向量就完全确定了平行六面体的形状和大小.

以向量$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$为邻边构成的平行四边形作为底面，其底面积为$S=|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|$，而这个底面上的高是$h=|\boldsymbol{\gamma}|\cos\ \ (\boldsymbol{\alpha}\quad\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$，于是得平行六面体的体积为

$$V=|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|\ |\boldsymbol{\gamma}||\cos\ \ (\boldsymbol{\alpha}\quad\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})|=|(\boldsymbol{\alpha}\quad\boldsymbol{\beta})\ \boldsymbol{\gamma}|,$$

根据向量混合积的计算公式得

$$V=|D|=\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\right|.$$

2.6.2 行列式计算的Matlab实现举例

【例2.17】 求解符号行列式方程$\begin{vmatrix}3 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2-x^2 & 1\\ 5 & 1 & 3 & 2\\ 7-x^2 & 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=0$.

【解】 计算行列式的值，得

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2-x^2 & 1\\ 5 & 1 & 3 & 2\\ 7-x^2 & 1 & 3 & 2\end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{\underset{r_4-r_3}{=\!=}}\begin{vmatrix}3 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1-x^2 & 0\\ 5 & 1 & 3 & 2\\ 2-x^2 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{2+3}(1-x^2)\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 2\\ 2-x^2 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-(1-x^2)(2-x^2)\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}=3(x^2-1)(2-x^2)\ .$$

解方程得到

$$x=\pm 1\ ,\quad x=\pm\sqrt{2}\ .$$

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
syms x                                        % 定义 x 为符号变量
A=[3,2,1,1;3,2,2-x^2,1;5,1,3,2;7-x^2,1,3,2];  %定义矩阵 A
D=det(A)                                      % 计算矩阵 A 的行列式 D
D =
-6+9*x^2-3*x^4                                %A 的行列式值
f=factor(D)                                   % 对多项式 D 进行因式分解
f =
   -3*(x-1)*(x+1)*(x^2-2)
                          % 从因式分解的结果，可以看出方程的解
X=solve(D)                % 求方程“D＝0”的解
X =      -1
          1
      2^(1/2)
     -2^(1/2)
```

【例 2.18】 利用克莱姆法则求解下列线性方程组的解.

$$\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8,\\ x_1-3x_2-6x_4=9,\\ x_2-x_3+2x_4=-5,\\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0.\end{cases}$$

【解】 计算下列行列式，得

能力培养

培养运用所学知识，解决问题能力

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 1\\1 & -3 & 0 & -6\\0 & 1 & -1 & 2\\1 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=-4\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}8 & 1 & -5 & 1\\9 & -3 & 0 & -6\\-5 & 1 & -1 & 2\\0 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=-48,\ D_2=\begin{vmatrix}2 & 8 & -5 & 1\\1 & 9 & 0 & -6\\0 & -5 & -1 & 2\\1 & 0 & -7 & 6\end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 8 & 1\\1 & -3 & 9 & -6\\0 & 1 & -5 & 2\\1 & 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-24,\ D_4=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 8\\1 & -3 & 0 & 9\\0 & 1 & -1 & -5\\1 & 4 & -7 & 0\end{vmatrix}=52.$$

则非齐次线性方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=12,\ x_2=\frac{D_2}{D}=27,\ x_3=\frac{D_3}{D}=6,\ x_4=\frac{D_4}{D}=-13.$$

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

能力培养

培养学生的计算能力

A=[2,1,-5,1;1,-3,0,-6;0,1,-1,2;1,4,-7,6];　　% 输入系数矩阵 A

A1=A; A2=A; A3=A; A4=A; b=[8,9,-5,0];

% 将 A 赋值给不同变量，b 为常数项，为求 D_i 准备

D=det(A);　　%求|A|

A1(:,1)=b ;　　% 将 A 中第 1 列替换为向量 b

D1=det(A1);　x1=D1/D　　% 求 D_1 继而求 x_1

x1 =　　% 运行求出 x1 的值

12

A2(:,2)=b ;　　% 将 A 中第 2 列替换为向量 b

D2=det(A2);　x2=D2/D　　% 求 D_2 继而求 x_2

x2 =　　% 运行求出 x2 的值

27

A3(:,3)=b ;　　% 将 A 中第 3 列替换为向量 b

D3=det(A3);　x3=D3/D　　% 求 D_3 继而求 x_3

x3 =　　% 运行求出 x3 的值

6

A4(:,4)=b ;　　% 将 A 中第 4 列替换为向量 b

D4=det(A4);　x4=D4/D　　%求 D_4 继而求 x_4

x4 =　　% 运行求出 x4 的值

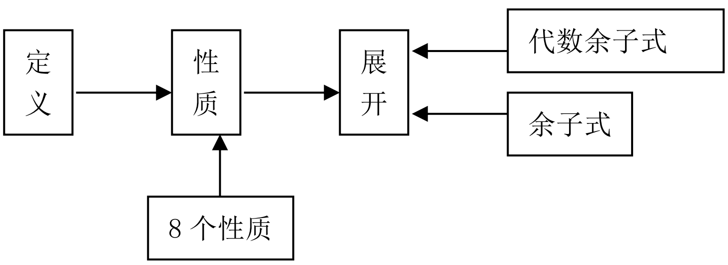
-13

能力培养

培养学生计算能力，分析能力，知识运用能力

第二章 复习及典型习题

一、知识点网络图



能力培养

培养学生分析问题能力和计算能力

二、考点归纳

1．行列式的概念: n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 是一个由 $n!$ 项组成的代数和，其中每一项都是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积，而这一项前面的符号取决于排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的逆序数 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$．例如排列 4231 的逆序数为 $\tau(4231)=0+1+1+3=5$． 当 $n=1$ 时，$D_1=\lvert a_{11}\rvert=a_{11}$． 当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$． 当 $n=3$ 时， $D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$． **2．行列式的性质** (9) 转置不变（所以下面的各条性质对列也成立）． (10) 换行反号（即交换某两行，则行列式知反号）． (11) 同行得零（即某两行相同的行列式值为零，此为（2）之推论）． (12) 倍提性质（即某一行所有元素都乘以同一数 k，等于用 k 乘此行列式）． (13) 零行得零（即有一行元素全为零的行列式值为零）． (14) 行成比例值为零（由（3）、（4）即知）． (15) 拆分性质（即某一行元素按均是两数之和，则可拆分为两个行列式之和）． (16) 倍加不变（即将某行的倍数加到另一行，行列式值不变）． **3．行列式按行（或列）展开定理** (1) 余子式、代数余子式：在 n 阶行列式 D 中，划去第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 后，余下的 $n-1$ 阶行列式 M_{ij} 称为 D 中元素 a_{ij} 的余子式，称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式. 例如，在 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 中， $M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$，$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=M_{22}$．	**能力培养** 培养学生知识总结能力

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}，\quad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}\ .$$

(2) 行列式按行（或列）展开定理：n 阶行列式 D_n 按第 i 行展开为

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

或按第 j 列展开为

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

(3) 行列式某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积的和等于零．即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\ (i\neq j),$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\ (i\neq j).$$

4. 常用的特殊行列式

(1) 上（下）三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\ ,\ D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\ .$$

(2) 反上（下）三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} * & & a_{1n} \\ & a_{2n-1} & \\ \iddots & & \\ a_{n1} & & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}a_{1n}a_{2n-1}a_{3n-2}\cdots a_{n1},$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & a_{2n-1} & \\ \iddots & & \\ a_{n1} & & * \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}a_{1n}a_{2n-1}a_{3n-2}\cdots a_{n1}.$$

(3) 范德蒙行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod\limits_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j).$

(4) 分块的上（下三角行列式）

$D=\begin{vmatrix}A&0\\C&B\end{vmatrix}=\lvert A\rvert\cdot\lvert B\rvert$ ， $D=\begin{vmatrix}0&A\\B&C\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\lvert A\rvert\cdot\lvert B\rvert$，其中 m,n 为 A,B 的阶数.	**能力培养** 培养学生知识总结能力

三、真题点击

题型一　有关行列式的概念和性质的题目

【例 1】（2004）设 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=M\neq 0$，则行列式 $\begin{vmatrix}-2a_{11}&-2a_{12}&-2a_{13}\\-2a_{31}&-2a_{32}&-2a_{33}\\-2a_{21}&-2a_{22}&-2a_{23}\end{vmatrix}=$【　　】.

A.$8M$　B.$2M$　C.$-2M$　　D.$-8M$

【答案】A. 本题考察行列式的倍提和换行反号性质。

【例 2】（2003）年真题. 行列式 $\begin{vmatrix}2&-1&x&2x\\1&1&x&-1\\0&x&2&0\\x&0&-1&-x\end{vmatrix}$ 展开式中 x^4 的系数是【　　】.

A.2　B.-2　C.1　　D.-1

【答案】A.本题考察行列式的定义. 提示：展开式中的一般项是 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$，第 1 行中含 x 为因子的元素有：$a_{13}=x,a_{14}=2x$；第 2 行中含 x 为因子的元素有：$a_{23}=x$；第 3 行中含 x 为因子的元素有：$a_{32}=x$；第 4 行中含 x 为因子的元素有：$a_{41}=x,a_{44}=-x$. 于是，含 x^4 的项只有：$(-1)^{\tau(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=(-1)^6 2x\cdot x\cdot x\cdot x=2x^4$，故正确选项为 A.

【例 3】（2007）行列式 $\begin{vmatrix}x&1&0&1\\0&1&x&1\\1&x&1&0\\1&0&1&x\end{vmatrix}$ 展开式中的常数项为【　　】.

A.4　B.2　C.1　　D.0

【答案】D. 本题考察行列式定义和性质. 提示：由行列式定义可知，所给行列式的展开式是关于 x 的多项式函数 $f(x)$，因此其常数项 $=f(0)$，而 $f(0)=\begin{vmatrix}0&1&0&1\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&0&1&0\end{vmatrix}=0$，故正确选项为 D。

【例 4】（2009）不恒为零的函数 $\boldsymbol{f(x)=\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+x & c_1+x \\ a_2+x & b_2+x & c_2+x \\ a_3+x & b_3+x & c_3+x \end{vmatrix}}$ A. 没有零点　　B. 至多有 1 个零点　　C. 恰好有 2 个零点　　D. 恰有 3 个零点. 【答案】B. 提示：利用行列式的倍加性质得到，$\boldsymbol{f(x)=\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+x & c_1+x \\ a_2+x & b_2+x & c_2+x \\ a_3+x & b_3+x & c_3+x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+x & c_1+x \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}}$，再由行列式的定义可知，$f\left(x\right)$ 至多是 x 的一次函数，因此 $f\left(x\right)$ 至多有 1 个零点. 三、回顾和小结 1．应用案例讲解； 2．第二章知识复习； 3.典型习题讲解； 四、复习思考与作业 **思考题：** 设 a,b,c 是方程 $x^3-2x+4=0$ 的三个根，则行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ 的值等于【　　】. $\text{A.}1\quad \text{B.}0\quad \text{C.}-1\qquad \text{D.}-2$ 【答案】B. 本题考察一元三次方程根与系数的关系、行列式的倍加性质、0 行得 0 性质。提示：由题意和根与系数的关系知，$a+b+c=0$. 于是 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+1\cdot r_2+1\cdot r_3} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0$ **作业题：** 北化在线平台测试 Mooc 平台单元测试	**能力培养** 培养学生分析问题能力和计算能力和概括总结能力

第（10）次课

<table>
<tr><td>教学章节</td><td>第三章　第 3.3 节</td><td>学时</td><td>3 学时</td></tr>
<tr><td>教材
和参考书</td><td colspan="3">1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015　；（教学用书）
2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书）
3. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考）
4. Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra，Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
5. Jim Hefferon，Linear Algebra，available for free online，2014. （教学参考）
6. 黄廷祝,成孝予，线性代数与空间解析几何,高等教育出版社,2008.（教学参考）
刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学目的：了解子式，非零子式，最高阶非零子式概念，掌握矩阵秩的定义,会求矩阵的秩.通过思政案例培养家国情怀、树立文化自信，培养学生逻辑推理能力及抽象思维能力，初步培养用矩阵及数学软件解决实际问题的能力。
2.教学重点：求矩阵的秩；
3.教学难点：求矩阵的秩</td></tr>
<tr><td colspan="4">1. 教学内容：矩阵的秩，初等行变换求矩阵的秩；
2. 时间安排：2 学时；
3. 教学方法：讲授与讨论相结合；
4. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc 平台讨论+测试.</td></tr>
<tr><td colspan="4">教学设计：
课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析）：
1.请查阅字典，看看秩都有什么意思；
2.猜猜，矩阵的秩会是什么？它在矩阵中的地位如何？</td></tr>
</table>

课中检测，并探讨重点、难点知识点 1.预习情况考察：什么是矩阵的秩？ 2.启发式学习：矩阵的秩这们重要，它会和课程里的那些内容相关呢？ 课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况） 1.布置书后作业，北化在线平台提交； 2.在北化在线平台完成课后测试； 3.在微信群、企业微信群、MOOC 平台、线下随时回答解决同学的问题；

基本内容	教学反思
第三节　　矩阵的秩 **一、　案例导引：** 前面对矩阵进行初等行变换，我们发现，最终得到的阶梯形及简化行阶梯形中非零行的行数是不变的。非零行的行数有什么特殊的含义呢？ **二、浸入式学习与价值引领** **1. 矩阵的秩定义** 定义 在$m\times n$矩阵A中任取k行k列（$k\le m,k\le n$），位于这些行列交叉处的k^2个元素，不改变它们在A中所处的位置次序而得到的k阶行列式，称为矩阵A的k阶子式. $m\times n$矩阵 A 的 k 阶子式共$C_m^k\cdot C_n^k$个. 定义　如果在矩阵A中有一个不等于零的r阶子式 D，且所有的$r+1$阶子式都等于0，则称 D 为A的一个最高阶非零子式. 数 r称为矩阵A的秩，矩阵A的秩记成$R(A)$. 零矩阵的秩规定为 0 . 注：若矩阵$\boldsymbol{A}$有一个s阶子式不等于零，则$R(\boldsymbol{A})\ge s$；若矩阵$\boldsymbol{A}$的所有$t+1$阶子式全为零，则$R(\boldsymbol{A})\le t$. 矩阵的秩是其非零子式的最高阶数. **2. 秩的性质** 定理　矩阵的秩具有如下性质： （1）$\boldsymbol{A}\ne\boldsymbol{O}\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})\ge 1$； （2）对于$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$，有$0\le R(\boldsymbol{A})\le\min(m,n)$； （3）$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^T)$；	**前测** 同学们可以上网查一下，秩在汉语中有哪些含义？猜猜，矩阵的秩什么意思？ **能力培养** 培养逻辑思维和抽象思维能力

（4）设k为非零常数，则$R(k\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$；

（5）对于n阶方阵$\boldsymbol{A}$，$|\boldsymbol{A}|\neq 0 \Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=n$.

【例3．3】求下列矩阵的秩：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\2&4&1&0\\3&6&0&9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

【解】对于矩阵$\boldsymbol{A}$，因为$\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0$，且有一阶非零子式，所以$R(\boldsymbol{A})=1$.

矩阵$\boldsymbol{B}$共有四个三阶子式，分别为

$$\begin{vmatrix}1&2&0\\2&4&1\\3&6&0\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&0\\3&6&9\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}1&0&3\\2&1&0\\3&0&9\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}2&0&3\\4&1&0\\6&0&9\end{vmatrix}=0,$$

所以$R(\boldsymbol{B})<3$，但有二阶子式$\begin{vmatrix}0&3\\1&0\end{vmatrix}=-3\neq 0$，所以$R(\boldsymbol{B})=2$.

而行阶梯形矩阵$\boldsymbol{C}$，显然所有的四阶子式的最后一行都为零，即所有四阶子式为零，但有三阶子式

$$\begin{vmatrix}1&1&4\\0&1&0\\0&0&-3\end{vmatrix}=-3\neq 0$$
，

所以$R(\boldsymbol{C})=3$.

用定义计算一般矩阵的秩非常麻烦，而求阶梯形矩阵的秩则容易的多：阶梯形矩阵的非零行数就是矩阵的秩.

3. 矩阵的秩与矩阵的初等变换

问题：阶梯形矩阵的秩易求，任意矩阵经过初等变换可化为阶梯型，经过初等变换矩阵的秩变吗？

定理　初等变换不改变矩阵的秩.

【证】由于交换两行（列）或用非零数乘某一行（列），都不改变子式是否为零的性质，因此对矩阵施行换法变换和倍法变换都不改变矩阵的秩．下面仅就行施行消法变换的情况给予证明．设

能力培养
请同学总结矩阵秩的求法，慕课平台讨论区。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = B$$

且A的秩为r，先证$R(B)\le R(A)$．设C为B的任意一个阶数大于r的s阶子式，则C有以下三种情形：

(1) C不包含第i行；

(2) C既包含第i行又包含第j行；

(3) C只包含第i行不包含第j行．

若是情形(1)，则C也是A的一个s阶子式；若是情形(2)，则由行列式的性质知，C与A的一个相应的s阶子式相等，由于A的秩为r，而$s>r$，因此，两种情形都有$C=0$．若是情形(3)，则由行列式性质知，

$$C=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

右端的两个行列式都是矩阵A的s阶子式，最多相差一个符号．由于A的秩是r，故这两个子式都等于零．因此，$C=0$．这就是说，矩阵B中阶数大于r的子式都等于零，因此$R(B)\le R(A)$．

反过来，矩阵$\mathbf{B}$也可经行初等变换变成$\mathbf{A}$，从而有$R(A)\le R(B)$，故$R(B)=R(A)$．

由于$R(A)=R(A^T)$，所以对列施行初等变换也不改变矩阵的秩．

总结：初等变换求矩阵秩的方法：

把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.

【例 3．4】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&-2&0\\3&0&6&-1&1\\2&1&4&2&1\end{pmatrix}$，求 $R(\boldsymbol{A})$.

【解】对矩阵施行初等变换，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&-2&0\\3&0&6&-1&1\\2&1&4&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-3r_1}}\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&0&0&-4&0\\0&3&0&-4&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_4-r_3}\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\0&0&0&-4&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中非零行的行数是 3，所以 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})=3$.

【例 3．5】设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，则 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B})$.

【证】若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$，于是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{AB}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 经 s 次初等变换得到，根据定理 3．3 可知 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B})$.

思政元素

三、回顾和小结

1. 一般线性方程组的基本概念及其矩阵表示

2. 初等行变换求解线性方程组

3. 矩阵秩的定义；

4. 利用初等行变换求矩阵的秩

四、复习思考与作业

<table>
<tr><td>

思考题：

总结一下，秩与方程组的解有什么关系？

作业题：

习题3.3： 第3（2）；4题

</td><td></td></tr>
</table>

第（11）次课

<table>
<tr><td>教学章节</td><td>第三章　第3.1,3.2节</td><td>学时</td><td>2学时</td></tr>
<tr><td>教材
和参考书</td><td colspan="3">7. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书）
8. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书）
9. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考）
10. Gilbert Strang， Introduction to Linear Algebra， Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
11. Jim Hefferon，Linear Algebra，available for free online，2014.（教学参考）
12. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008.（教学参考）
刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学目的：了解一般线性方程组的基本概念及其矩阵表示，掌握初等行变换求解线性方程组的方法，通过思政案例培养家国情怀、树立文化自信，培养学生逻辑推理能力及抽象思维能力，初步培养用矩阵及数学软件解决实际问题的能力。
2.教学重点：初等行变换求解线性方程组；
3.教学难点：初等变换求线性方程组的解。</td></tr>
</table>

5. 教学内容：初等行变换求解线性方程组

6. 时间安排：2 学时；

7. 教学方法：讲授与讨论相结合；

8. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc 平台讨论+测试.

教学设计：

课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析）：

1. 复习初等变换将矩阵化为阶梯型和简化行阶梯型矩阵；
2. 阶梯型矩阵对应的方程组是什么样的，简化行阶梯型呢？它们与原方程组的解有什么关系？

课中检测，并探讨重点、难点知识点

1. 启发式教学：方程组长什么样子好求解？能对初始方程组变形吗？，解会变吗；

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况）

1. 布置书后作业，北化在线平台提**交**；
2. 在北化在线平台完成课后测试；
3. 在微信群、企业微信群、MOOC 平台、线下随时回答解决同学的问题；

基本内容	教学反思
第一节　　一般线性方程组的基本概念及其矩阵表示	**思政元素** 九章算术第八章方程章　用了初等变换的原理求解方程组，培养学生的文化自信。

一． 案例导引：

回顾【例 1.6】《九章算术·方程》 今有：
上禾三秉，中禾一秉，下禾二秉，实四十斗；
上禾二秉，中禾一秉，下禾三秉，实三十一斗；
上禾一秉，中禾三秉，下禾二秉，实二十四斗；
问 上、中、下 禾 实一秉各几何?

【解】 设上禾实一秉 x 斗，
中禾实一秉 y 斗，
下禾实一秉 z 斗，

则有三元一次线性方程组

$$\begin{cases} 3x+y+2z=40 \\ 2x+y+3z=31 \\ x+3y+2z=24 \end{cases} \Longrightarrow \tilde{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 40 \\ 2 & 1 & 3 & 31 \\ 1 & 3 & 2 & 24 \end{pmatrix}$$

板书演示九章算术求解方程组的过程，树立文化自信。

一、 浸入式学习与价值引领

1. 线性方程组的基本概念

线性方程组的一般形式如下：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 x_j 是未知量，a_{ij} 是系数，b_j 是常数项，$i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n.$

当常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 中至少有一个不为零时，称式（3．1）为非齐次线性方程组

当常数项全部为零，即 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ 时，方程组（3．1）为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad\quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

称方程组（3．2）为齐次线性方程组，也称为与方程组（3．1）对应的齐次线性方程组，或称为方程组（3．1）的导出组.

若将数组 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$ 代入方程组（3．1），得到 m 个等式

$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots a_{in}c_n = b_i \quad (i = 1,2,\ldots,m)$，

则称这个数组为方程组（3．1）的一个解.

定义 3．1　将线性方程组（3．1）的所有解组成集合称为解集合；解集合为空集时的方程组称为不相容的方程组，也称该方程组无解；如果非空的解集合只有一个元素，则称该方程组的解具有唯一性；解集合相同的线性方程组称为同解方程组.

定义 3．2　当线性方程组有无穷多个解时，其所有解的集合称为方程组的一般解（或通解）．解集合中一个特定元素称为该方程组的具体解（或特解）．

定义 3．3　所有未知量均取零的解称为该方程组的零解．未知量不全取零的解称为该方程组的非零解.

小结：

课堂讨论

齐次线性方程组一定有解吗？为什么？你能找到他的一个解吗？慕课平台讨论区回答。

任何一个齐次线性方程组都有零解；若齐次线性方程组有非零解，则解不唯一.

2. 线性方程组的矩阵表示

任何一个线性方程组与它的增广矩阵一一对应，在线性方程组（3．1）式中，若记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}，\ \widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b}\right)_{m\times(n+1)}\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为该方程组的系数矩阵，矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 称为该方程组的增广矩阵.

再记 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}，\ \boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，则方程组（3．1）和（3．2）分别可表示为如下矩阵形式

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b} \qquad (3.3)$$

和

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0} \qquad (3.4)$$

3. 线性方程组的求解与矩阵的初等行变换

利用高斯消元法求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+ax_3=b, \\ x_1+2x_2+3x_3=4, \\ x_1+x_2 \qquad\quad =1. \end{cases}$$

【解】本题为叙述方便，将对应方程组的增广矩阵及其相应的初等变换写在该方程组的右边.

原方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2+ax_3=b, \\ x_1+2x_2+3x_3=4, \\ \boxed{x_1}+x_2 \qquad\quad =1, \end{cases} \qquad \widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & a & b \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$

首先完成逐步消元过程：

第一步：对原方程组，首先挑选一个含变量 x_1 的方程作为第一个方程（称为保留方程），然后消去除保留方程之外的其余方程中的变量 x_1．为计算方便，交换原方程组中的第一、第三两个方程的位置，得到

能力培养
请同学们比较九章算术方程组求解和初等变换求解方程组的异同。培养逻辑思维能力。

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\boxed{x_1}+x_2=1,\\ x_1+2x_2+3x_3=4,\\ 2x_1+3x_2+ax_3=b,\end{cases}\qquad \widetilde{\boldsymbol{A}}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\widetilde{\boldsymbol{A}}_1=\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&0&1\\1&2&3&4\\2&3&a&b\end{array}\right).$$

把方程组（I）中的第一个方程的-1 倍加到第二个方程上，再将第一个方程的-2 倍加到第三个方程上，得到

$$(\mathrm{II})\begin{cases}\boxed{x_1}+x_2=1,\\ \boxed{x_2}+3x_3=3,\\ x_2+ax_3=b-2,\end{cases}\qquad \widetilde{\boldsymbol{A}}_1\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\widetilde{\boldsymbol{A}}_2=\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&0&1\\0&\boxed{1}&3&3\\0&1&a&b-2\end{array}\right).$$

第二步：对方程组（II），掩盖住保留的第一个方程，对其余的两个方程，挑选一个含变量 x_2 的方程作为第二个方程（这已是第二个保留方程了），然后消去第三个方程中的变量 x_2．为此，把方程组（II）中第二个方程的-1 倍加到第三个方程上去，得到

$$(\mathrm{III}_1)\begin{cases}\boxed{x_1}+x_2=1,\\ \boxed{x_2}+3x_3=3,\\ (a-3)x_3=b-5,\end{cases}\qquad \widetilde{\boldsymbol{A}}_2\xrightarrow{r_3-r_2}\widetilde{\boldsymbol{A}}_3=\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&0&1\\0&\boxed{1}&3&3\\0&0&a-3&b-5\end{array}\right).$$

为减少计算量，第二步也可以这样做：对方程组（II），掩盖住保留的第一个方程，对其余的两个方程，挑选一个含变量 x_2 的方程作为第二个方程（这已是第二个保留方程了），然后消去除了第二个保留方程之外的其它两个方程中的变量 x_2．为此，把方程组（II）中第二个方程的-1 倍分别加到第一个和第三个方程上去，得到

$$(\mathrm{III}_2)\begin{cases}\boxed{x_1}-3x_3=-2,\\ \boxed{x_2}+3x_3=3,\\ (a-3)x_3=b-5,\end{cases}\qquad \widetilde{\boldsymbol{A}}_3\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-r_2}\widetilde{\boldsymbol{B}}_2=\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&0&-3&-2\\0&\boxed{1}&3&3\\0&0&a-3&b-5\end{array}\right).$$

显然，方程组(III_2)比(III_1)更简化．本题至此，已将原方程组化为三角形方程组，也称为原方程组的保留方程组．此时注意到对应的系数矩阵都是行阶梯形矩阵．

再逐步完成回代过程：

应从保留方程组(III_1)或(III_2)的最后一个方程入手．因为这个方程

$$(a-3)x_3=b-5 \tag{3．6}$$

中含有参数，需要分情况讨论：

（1）当$a\neq 3$时，一元一次方程（3．6）有唯一解：$x_3=\dfrac{b-5}{a-3}$；将其代入(III_1)或(III_2)的第二个方程解得：$x_2=\dfrac{3a-3b+6}{a-3}$；再将x_2和x_3代入(III_1)或(III_2)的第一个方程，解得$x_1=\dfrac{-2a+3b-9}{a-3}$．从而得到，在$a\neq 3$时，原方程组有唯一解 $$\begin{cases}x_1=\dfrac{-2a+3b-9}{a-3},\\x_2=\dfrac{3a-3b+6}{a-3},\\x_3=\dfrac{b-5}{a-3}.\end{cases}$$ （2）当$a=3$，$b\neq 5$时，一元一次方程（3．6）是矛盾方程，也即方程组(III_1)或(III_2)的第三个方程为矛盾方程，此时，原方程组无解． （3）当$a=3$，$b=5$时，方程组(III_2)成为 $$(\mathrm{IV})\begin{cases}x_1\qquad -3x_3=-2,\\ \qquad x_2+3x_3=3.\end{cases}\qquad（3．7）$$ 从方程组（3．7）看出，每给定变量x_3的一个取值，可唯一地求出x_1,x_2的一组值．由于x_3可任意赋值，因而方程组（3.7）有无穷多个解，取$x_3=k$，则原方程组有无穷多个解，其一般解为 $$\begin{cases}x_1=3k-2,\\x_2=-3k+3,\\x_3=k,\end{cases}\text{其中}k\text{为任意常数．}$$ **4. 初等变换** 上述对方程组进行了三种变换： （1）交换两个方程的位置次序； （2）用一非零的数乘某一方程； （3）把一个方程的倍数加到另一个方程上． 称这三种变换为线性方程组的初等变换． 线性方程组的初等变换是“可逆的”，初等变换只是对线性方程组的系数和常数项进行了运算，而未知量并未参与运算，因而有如下定理： 定理3．1 对线性方程组的增广矩阵$\widetilde{\boldsymbol{A}}$作初等行变换得矩阵$\widetilde{\boldsymbol{B}}$，则$\widetilde{\boldsymbol{B}}$对应的	**课堂互动** 请雨课堂回答，上述对方程组的操作可归结为几类？ 课堂讨论 对一个方程组施行消元法化简为阶梯

非齐次线性方程组与$\widetilde{\boldsymbol{A}}$对应的非齐次线性方程组是同解的线性方程组.

总结：对一个方程组施行消元法化简为阶梯形方程组的过程，相当于用矩阵的初等行变换化简它的增广矩阵为行阶梯形矩阵的过程.

【例 3．1】设线性方程组

$$\begin{cases} 5x_3+2x_4=11, \\ -6x_2+4x_3+\ x_4=-2, \\ 8x_1-3x_2+2x_3-2x_4=12, \\ 3x_4=-6. \end{cases}$$

利用线性方程组的增广矩阵求解.

【解】

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 5 & 2 & 12 \\ 0 & -6 & 4 & 1 & -2 \\ 8 & -3 & 2 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -3 & 2 & -2 & 12 \\ 0 & -6 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{5}r_3]{\frac{1}{8}r_1,\ -\frac{1}{6}r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-\frac{2}{5}r_4]{r_1+\frac{1}{4}r_4,\ r_2+\frac{1}{6}r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+\frac{2}{3}r_3]{r_1-\frac{1}{4}r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1+\frac{3}{8}r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right),$$

以最后一个行简化阶梯形为增广矩阵的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3, \\ x_4 = -2. \end{cases}$$

消元法求解线性方程组的回代过程，是继续将对应的“行阶梯形的”矩阵进一步化为简化行阶梯形矩阵的过程．将方程组对应的增广矩阵施以初等行变换，直到化为行简化阶梯形矩阵后再停止，可以得到方程组的最简形式，从而直接得到方程组的解.

【例 3．2】设线性方程组

形方程组的过程，相当于增广矩阵的哪个运算呢？慕课平台回答。

$$\begin{cases} \quad\ x_2 + x_3 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_3 + 3x_5 = 2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = d-1, \\ x_1 + x_3 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

（1）利用矩阵的初等行变换求出增广矩阵的一个等价行阶梯形矩阵；

（2）利用（1）的结果求出方程组的解.

【解】（1）对增广矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 施行初等行变换得

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 3 & d-1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_5} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 3 & d-1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3+r_1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -1 & d-3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_5} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -1 & d-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3-r_2 \\ r_4+2r_2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & d+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4+2r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(-1)r_3 \\ r_4 \leftrightarrow r_5}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d+1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_5-r_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right) \triangleq \widetilde{\boldsymbol{A}}_1$$

$$\xrightarrow{\substack{r_1-2r_4 \\ r_2-r_1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right) \triangleq \widetilde{\boldsymbol{A}}_2 \xrightarrow{\substack{r_1-r_3 \\ r_2-r_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right) \triangleq \widetilde{\boldsymbol{A}}_3$$

得到的如上矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_1$，$\widetilde{\boldsymbol{A}}_2$，$\widetilde{\boldsymbol{A}}_3$ 都是增广矩阵的等价行阶梯形，其中 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_3$ 还是行简化阶梯形矩阵.

（2）以行简化阶梯形矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_3$ 为增广矩阵的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad -x_4 \qquad = -1, \\ \qquad x_2 \qquad -x_4 \qquad = 1, \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 \qquad = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_5 = 1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d, \end{cases} \tag{3.8}$$

显然它可以看作是原方程组经过方程组的初等变换得到的同解方程组．但需要分情况讨论：

（I）当 $d \neq 0$ 时，方程组（3．8）第五个方程为矛盾方程，因而此时原方程组无解；

（II）当 $d = 0$ 时

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad -x_4 = -1, \\ \qquad x_2 \qquad\qquad -x_4 = 1, \\ \qquad\qquad x_3 \qquad +x_4 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad x_5 \qquad = 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 + x_4, \\ x_2 = 1 + x_4, \\ x_3 = -x_4, \\ x_5 = 1. \end{cases}$$

原方程组有无穷多个解，其一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -1 + c, \\ x_2 = 1 + c, \\ x_3 = -c, \\ x_4 = c, \\ x_5 = 1, \end{cases}$$

其中 c 为任意常数，我们也称 x_4 为自由未知量．

三． 回顾和小结

1.一般线性方程组的基本概念及其矩阵表示

2.初等行变换求解线性方程组

四．复习思考与作业

思考题：

$m \times n$ 矩阵 A 的 $\boldsymbol{k}$ 阶子式共有多少个？

作业题： 习题 3.1：第 1 题	

第（12）次课

教学章节	第三章　第 3.4 节，第三章习题课	学时	2 学时
教材 和参考书	1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书） 2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书） 3. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考） 4. Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra，Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考） 5. Jim Hefferon，Linear Algebra，available for free online，2014. （教学参考） 6. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考） 7.刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）		

1.教学目的：理解齐次线性方程组有非零解的充要条件及非齐次线性方程组有解的充要条件；使学生掌握用行初等变换求线性方程组通解的方法；培养学生的抽象思维能力及分析问题解决问题的能力。掌握第三章典型习题解法。

2.教学重点：初等变换求线性方程组通解的方法；第三章复习。

3.教学难点：齐次线性方程组有非零解的充要条件及非齐次线性方程组有解的充要条件，第三章典型习题。

4.教学内容：线性方程组有解的判定与求解；第三章典型习题与知识点复习。

5.时间安排：2 学时；

6.教学方法：讲授与讨论相结合；

7.教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc 平台讨论+测试.

教学设计：

课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析）：

1.复习第三章；

2.复习秩的概念，简化行阶梯型和秩的关系？

课中检测，并探讨重点、难点知识点

1.增广矩阵中，列、行、非零行个数都代表了什么意思？

2.方程组是否有解和什么有关？

3.第三章复习总结。

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况）

1.布置书后作业，北化在线平台提交；

2.在北化在线平台完成课后测试；

3.在微信群、企业微信群、MOOC 平台、线下随时回答解决同学的问题；

基本内容	教学反思
第四节　线性方程组有解的判定与求解 **一、　案例导引：** 方程组与矩阵一一对应，方程组求解可用增广矩阵做初等行变换求解。解的可数到底取决于什么呢？秩又有什么含义呢？ **二、浸入式学习与价值引领** **1.齐次线性方程组有非零解的秩法判定及其初等变换法求解** $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{cases}$ 设系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，即 $R(\boldsymbol{A})=r$．对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换和列的换法变换，对应	**前测**在慕课讨论区回答秩与有效方程个数，与方程组解的个数有什么关系？

的同解齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 + & & c_{1\,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & +c_{1\,n}x_n & = 0, \\ & x_2 + & c_{2\,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & +c_{2\,n}x_n & = 0, \\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & x_r + & c_{r\,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & +c_{r\,n}x_n & = 0, \end{cases} \qquad (3.11)$$

它是原方程组的同解方程组.

对方程组的解有以下结论.

（1）若 $r<n$，则方程组（3．11）为

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1\,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1\,n}x_n, \\ x_2 = -c_{2\,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2\,n}x_n, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -c_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - c_{r\,n}x_n, \end{cases} \qquad (3.12)$$

式右端的 $n-r$ 个未知量 $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ 称为自由未知量.

（2）$r=n$，则方程组（3．11）为

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ \cdots\cdots \\ x_n = 0, \end{cases}$$

即方程组只有零解.

定理 3．5 用初等变换化线性方程组为阶梯形的同解方程组，保留方程组中方程的个数是由系数矩阵的秩唯一确定的，与所做的变换无关.

定理 3．6 齐次线性方程组解的情况只有两种可能：只有零解或有非零解.

（1）只有零解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于未知量的数目，即 $R(\boldsymbol{A})=n$；

（2）有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩小于未知量的数目，即 $R(\boldsymbol{A})<n$.

推论 3．1 当方程个数与未知量个数相等，即 $m=n$ 时，齐次线性方程组

（1）只有零解的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

（2）有非零解的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$.

推论 3．2 当方程个数小于未知量个数，即 $m<n$ 时，齐次线性方程组必有非零解.

【证】因为 $R(\boldsymbol{A})\leq \min(m,n)$，而 $\min(m,n)=m$，所以 $R(\boldsymbol{A})\leq m<n$．故方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 一定有非零解.

【例 3．6】求 k 的值，使得齐次线性方程组

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + kx_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解.

【解】由推论 3．1 可知，该齐次线性方程组的系数行列式为零，即

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

由

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2+r_3]{r_1+r_2} \begin{vmatrix} k+1 & k+1 & 0 \\ 3 & k-1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+1 & k+1 \\ 3 & k-1 \end{vmatrix} = (k+1)(k-4),$$

可知 $k=-1$ 或 $k=4$ 时，该齐次线性方程组有非零解.

【例 3．7】求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

【解】对方程组的系数矩阵施行初等行变换，将其化为行阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+r_2 \\ r_1+r_2}]{\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是原方程组的同解方程组是:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_3 = 2x_4. \end{cases}$$

或改写为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = 2x_4, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

令自由未知量 $x_2 = c_1, x_4 = c_2$，即得原方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + c_2, \\ x_2 = c_1, \\ x_3 = 2c_2, \\ x_4 = c_2. \end{cases}$$

其中c_1, c_2为任意常数.

3. 非齐次线性方程组有解的秩法判定及其初等变换法求解

【例3．15】（配平化学方程式问题）某些反应容器中同时发生几个反应，且不同的反应之间存在如下关系：前面的反应产物全部或部分是后面反应的产物．对于这样的反应，用化学方程式描述了化学反应的物质消耗和生产的数量．这类化学反应方程式的配平可根据质量守恒来进行．

当丙烷气体燃烧时，丙烷（C_3H_8）与氧结合生成二氧化碳和水，用方程表示为

$$C_3H_8 + O_2 \to CO_2 + H_2O \ .$$

设x_1单位的丙烷和x_2单位的氧燃烧，产生x_3单位的二氧化碳和x_4单位的水，即

$$x_1C_3H_8 + x_2O_2 = x_3CO_2 + x_4H_2O \ .$$

为平衡该方程式，需要选择其中的x_1, x_2, x_3和x_4使方程式两边的碳，氢和氧原子的数量分别相等．根据质量守恒，得

$$\begin{cases} 3x_1 = x_3, \\ 8x_1 = 2x_4, \\ 2x_2 = 2x_3 + x_4. \end{cases}$$

于是配平该化学方程式就归结为如下齐次线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 \quad\quad - x_3 \quad\quad = 0, \\ 8x_1 \quad\quad\quad\quad - 2x_4 = 0, \\ \quad\quad 2x_2 - 2x_3 - \ x_4 = 0. \end{cases}$$

求解上述方程组，可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}，这里 k 为任意常数.$$

一般情形下，倾向于使用尽量小的整数作为系数来配平方程式，故有

$$C_3H_8 + 5O_2 = 3CO_2 + 4H_2O \ .$$

由此例，可知非齐次线性方程组的解的情况

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{cases}$$

，设系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，即 $R(\boldsymbol{A})=r$．将增广矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 变换成如下形式

$$\tilde{\boldsymbol{B}}=\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1\,r+1} & \cdots & c_{1\,n} & & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2\,r+1} & \cdots & c_{2\,n} & & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r\,r+1} & \cdots & c_{r\,n} & & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \end{array}\right)_{m\times(n+1)}.$$

对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1+ \qquad\qquad c_{1\,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{r\,n}x_n=d_1, \\ \quad x_2+ \qquad\quad c_{2\,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{r+1\,n}x_n=d_2, \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ \qquad\qquad x_r+c_{r\,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{r\,n}x_n=d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1}, \end{cases} \tag{3.13}$$

它是原方程组的同解方程组，也称为原方程组的保留方程组．对方程组的解有以下结论．

（1）若 $d_{r+1}\neq 0$，则方程组（3．13）中有矛盾方程，因而原方程组无解．

（2）若 $d_{r+1}=0$ 且 $r<n$，则方程组（3．13）可写成

$$\begin{cases} x_1+ \qquad\qquad c_{1\,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{1\,n}x_n=d_1, \\ \quad x_2+ \qquad\quad c_{2\,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{2\,n}x_n=d_2, \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ \qquad\qquad x_r+c_{r\,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{r\,n}x_n=d_r, \end{cases} \tag{3.14}$$

取 $x_{r+1},\ldots,x_n$ 为 $n-r$ 个自由未知量，若任给 $y_{r+1},\ldots,y_n$ 的一组值，就唯一地确定出 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 的值，从而给出方程组（3．1）的一个解，这表明方程组（3．1）有无穷多个解，其一般形式为：

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}k_1 - \cdots - c_{1,n}k_{n-r}, \\ x_2 = d_2 - c_{2,r+1}k_1 - \cdots - c_{2,n}k_{n-r}, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}k_1 - \cdots - c_{r,n}k_{n-r}, \\ x_{r+1} = k_1, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = k_{n-r}. \end{cases}$$

其中$k_1,\ldots,k_{n-r}$为任意常数.

（3）若$d_{r+1}=0$且$r=n$，则方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = d_1, \\ x_2 = d_2, \\ \quad \cdots \\ x_n = d_n. \end{cases}$$

定理3．7 用初等变换化线性方程组为阶梯形的同解方程组，保留方程组中方程的个数是由系数矩阵或增广矩阵的秩唯一确定的，与所做的变换无关.

定理3．8 非齐次线性方程组(3．1)的解的情况只有三种可能：无解，有唯一解，有无穷多解.

（1）无解的充分必要条件是$R(\boldsymbol{A}) \neq R(\widetilde{\mathbf{A}})$；

（2）有唯一解的充分必要条件是$R(\boldsymbol{A}) = R(\widetilde{\boldsymbol{A}}) = n$；

（3）有无穷多解的充分必要条件是$R(\boldsymbol{A}) = R(\widetilde{\boldsymbol{A}}) < n$.

【例3．8】求解下列非齐次线性方程组：

（1）$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

（2）$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 7. \end{cases}$

【解】（1）对方程组的增广矩阵作初等行变换，将其化为行阶梯形矩阵.

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&1&1\\3&2&-2&2&3\\2&-1&-1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&1&1\\0&-7&1&-1&0\\0&-7&1&-1&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&1&1\\0&-7&1&-1&0\\0&0&0&0&-3\end{array}\right),$$

可见$R(A)=2,R(\widetilde{\mathbf{A}})=3$，因而$R(A)\neq R(\widetilde{A})$，故方程组无解.

（2）对方程组的增广矩阵作初等行变换，将其化为行阶梯形矩阵.

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\left(\begin{array}{cccc|c}5&2&3&-2&3\\1&-3&4&3&4\\2&4&-2&-4&-2\\3&-4&2&4&7\end{array}\right)\xrightarrow{r\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-3&4&3&4\\5&2&3&-2&3\\2&4&-2&-4&-2\\3&-4&2&4&7\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-5r_1\\r_3-2r_1}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-3&4&3&4\\0&17&-17&-17&-17\\0&10&-10&-10&-10\\0&5&-10&-5&-5\end{array}\right)\xrightarrow[r_4\div5]{\substack{r_2\div17\\r_3\div10}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-3&4&3&4\\0&1&-1&-1&-1\\0&1&-1&-1&-1\\0&1&-2&-1&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-3&4&3&4\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_1+3r_2]{r_3\leftrightarrow r_4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&1\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

可见$R(A)=R(\widetilde{A})=3<n=4$，因而方程组有无穷多解，于是继续对上面的矩阵施行初等行变换直至化为行简化阶梯形，得到

$$\widetilde{\mathbf{A}}\xrightarrow[-r_3]{\substack{r_2-r_3\\r_1+r_3}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

于是原方程组的同解方程组是:

$$\begin{cases}x_1=1,\\x_2=-1+x_4,\\x_3=0.\end{cases}\qquad\text{或改写为}\qquad\begin{cases}x_1=1,\\x_2=-1+x_4,\\x_3=0,\\x_4=x_4.\end{cases}$$

令自由未知量$x_4=c$，即得原方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1 + c, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = c. \end{cases}$$

其中c为任意常数.

【例3．9】讨论λ取何值时，方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$$

有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时，求出其通解.

【解】方法一　对方程组的增广矩阵施行初等行变换，将其化为行阶梯形矩阵

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - r_1]{r_3 \leftrightarrow r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - \lambda r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1-\lambda \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) & \lambda-1 \end{array}\right) = \widetilde{\boldsymbol{B}}, \tag{3.15}$$

由此可见:

（1）当$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$时，$R(\boldsymbol{A}) = R(\widetilde{\boldsymbol{A}}) = 3$，故方程组有唯一解.

（2）当$\lambda = -2$时，　$R(\boldsymbol{A}) = 2$，$R(\widetilde{\boldsymbol{A}}) = 3$，所以$R(\boldsymbol{A}) \neq R(\tilde{\boldsymbol{A}})$，故方程组无解.

（3）当$\lambda = 1$时，$R(\boldsymbol{A}) = R(\widetilde{\boldsymbol{A}}) = 1 < 3$，故方程组有无穷多解．将$\lambda = 1$代入式（3．15）中的$\widetilde{\boldsymbol{B}}$矩阵，继续施以初等行变换，直至化为行简化阶梯形（如果需要），得到

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

于是原方程组的同解方程组是:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 + 1, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

令自由未知量$x_2 = c_1, x_3 = c_2$，即得原方程组的通解为

$$\begin{cases}x_1=-c_1-c_2+1,\\ x_2=c_1,\\ x_3=c_2.\end{cases}$$

其中c_1,c_2为任意常数．

方法二 方程的个数与未知量的个数相同，可先从 Cramer 法则入手进行讨论．方程组的系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

根据克莱姆法则，当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即当$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$时，方程组有唯一解．当$|\boldsymbol{A}|=0$，当$\lambda=-2$或$\lambda=1$时，方程组可能无解可能有无穷多解，需要进一步讨论如下：

对$\lambda=-2$，方程组的增广矩阵为$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$，对其施行初等行变换化为行阶梯形得

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right),$$

可见$R(\boldsymbol{A})=2\neq R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=3$，此时方程组无解．

对$\lambda=1$，方程组的增广矩阵为$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$，对其施行初等行变换化为行阶梯形得

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

可见$R(\boldsymbol{A})$=$R(\widetilde{\boldsymbol{A}})$=$1<3$，此时方程组有无穷多解，以下同方法一。

第三章　复习及典型习题

<u>线性方程组解的性质和解的结构</u>齐次线性方程组$AX=\mathbf{0}$的任何k个解的线性组合仍是方程组本身的解．其通解由基础解系的线性组合构成．

(1) 非齐次线性方程组$AX=b$的：任何两个解的差是与其对应的齐次方程组的解；任何k个解的算术平均值仍是方程组本身的解；任何k个解的线性组合当k个表示系数的和为 1 时仍是方程组的解．其通解由对应的齐次方程组的通解和本身的一个特解两部分构

成．

4. 线性方程组解的判定

(1) 齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 总是有解的，它的解有两种可能情形：零解或非零解．

$$\text{方程组只有零解} \Leftrightarrow r(A)=n；$$

$$\text{方程组有非零解} \Leftrightarrow r(A)<n．$$

特别地，当 $m=n$ 时（即方程个数与未知量个数相等）．

$$\text{方程组只有零解} \Leftrightarrow |A|\neq \mathbf{0}；$$

$$\text{方程组有非零解} \Leftrightarrow |A|=\mathbf{0}．$$

【温馨提示】对齐次方程组，当 $m<n$ 时（即当方程个数小于未知量个数时）必有非零解，反之不然．

(2) 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解有三种可能情形：无解，有惟一解，有无穷多解．

$$\text{方程组无解} \Leftrightarrow r(A)\neq r(A,b)；$$

$$\text{方程组有惟一解} \Leftrightarrow r(A)=r(A,b)=n．$$

$$\text{方程组有无穷多解} \Leftrightarrow r(A)=r(A,b)<n$$

特别地，当 $m=n$ 时（即方程个数与未知量个数相等），方程组有惟一解 $\Leftrightarrow |A|\neq \mathbf{0}$；

当 $|A|=\mathbf{0}$ 时，方程组可能无解，也可能有解．

【温馨提示】对非齐次方程组 $AX=b$，当 $m=n$ 时（即方程个数与未知量个数相等时），系数行列式 $|A|=\mathbf{0}$ 是方程组无解的必要条件而非充分条件．

【例 1】(2010)线性方程组 $\begin{cases} 4x_1+tx_2+x_3=1, \\ \qquad 4x_2+5x_3=1, \\ -x_1+\ x_2+x_3=0, \\ -5x_1+x_2 \qquad =-1 \end{cases}$，当【　　】．

A. $\boldsymbol{t\neq 0}$ 时无解；***B.*** $\boldsymbol{t\neq 0}$ 时有无穷多解；***C.*** $\boldsymbol{t=0}$ 时无解；***D.*** $\boldsymbol{t=0}$ 时有无穷多解

【答案】D. 本题考察非齐次方程组有解的充要条件．

$$\begin{pmatrix} 4 & t & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ -5 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & t & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & t+4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$t=0 \Leftrightarrow r\left(A\,b\right)=r\left(A\right)=1<3$，故正确选项为 D。

【例 2】(2011)若方程组$\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=0, \\ -x_1+ax_2+x_3=a^2, \\ x_2+x_3=-4 \end{cases}$有解，则其中$a=$【　　】.

A.3；***B*.2**；***C*.－2**；***D*.－4**

【答案】C. 本题考察非齐次方程组有解的充要条件.
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ -1 & a & 1 & a^2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & a & a^2+4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & (a+2)^2 \end{pmatrix}$故$a=-2$.

【例 30】(2006)设三阶矩阵A的秩$\boldsymbol{r(A)=1}$，$\boldsymbol{\eta_1=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\end{pmatrix}^T}$，$\boldsymbol{\eta_2=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\end{pmatrix}^T}$，$\boldsymbol{\eta_3=\begin{pmatrix}5 & 0 & k\end{pmatrix}^T}$是方程组$AX=0$的三个解向量，则常数$k=$【　　】.

A.－2　　B.－1　　C.2　　D.3

【答案】D.本题考察齐次方程组基础解系的定理、解的判定、解的性质. 提示：方程组$AX=0$的基础解系所含向量的个数为$n-r(A)=3-1=2$，于是线性无关的解的个数最多为 2，因此η_1,η_2,η_3必线性相关，故$\begin{vmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix}=-5k+15=0 \Rightarrow k=3$.

三、回顾和小结

1. 矩阵秩的定义；
2. 利用初等行变换求矩阵的秩

四、复习思考与作业

思考题：

对方程组求解能对增广矩阵或系数矩阵做初等变换吗？

2. 作业题：习题 3.4： 第 3（1）；4（2）；5 题

第（13）次课

教学章节	第四章 第 4.1、4.2 节（1）	学时	2 学时
教材 和参考书	1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书） 2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书） 3. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考） 4. Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考） 5. Jim Hefferon，Linear Algebra，available for free online，2014. （教学参考） 6. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考） 7. 刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）		
1.教学目的：了解 n 维向量的定义；掌握向量的线性运算，应用向量的运算重新认识线性方程组，理解向量组的线性相关和线性无关的概念，能够判断向量组的线性关系，理解线性相关性与线性表示之间的联系，穿插思政案例培养自信、爱国的情怀，培养学生逻辑推理能力及抽象思维能力。 2.教学重点：向量组的线性相关性的定义及判断定理，向量组线性相关和线性表示间的关系； 3.教学难点：向量组的线性相关性的定义及判断定理，向量组线性相关和线性表示间的关系。			
1.教学内容：向量；向量组的线性关系； 2.时间安排：2 学时； 3.教学方法：讲授与讨论相结合； 4.教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc 平台讨论+测试。			

教学设计：

课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析，培养学生自主学习能力，训练独立思考的素质）：

1. 观看中国大学慕课平台线性代数典型习题讲解中的课程导学，初步了解向量及其线性关系；
2. 复习高中学过的复数的几何意义及对应关系；
3. 了解不同空间的表达形式，特别是现实生活的 3 维空间；
4. 学习 MATLAB 关于向量运算的命令。

课中检测，并探讨重点、难点知识点（将启发式、互动式和探究式等多种教学方法适时融入教学过程，提高学生课堂学习的深度参与度，培养逻辑思维能力，思辨能力等）：

1．在案例分析引入向量定义之后，雨课堂完成对向量的应用习题；

2．多种形式的课堂讨论：

① 启发式提问引起课堂讨论：讨论向量组的运算与线性方程组的关系，从列的方面理解线性方程组以及解的等价表达形式。

② 教师举例引起课堂讨论：举出向量线性相关和线性无关的等价描述，说明向量的具体作用，阶数较低时用几何的方式理解线性关系。

③提问预习结果：向量的线性运算是什么？满足什么运算性质？并加以点评。老师起引导作用，主要锻炼同学利用所学知识分析问题解决问题的能力。

3．翻转课堂：

根据课前布置的任务，翻转课堂，由学生分享向量在生活中的使用。

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况，帮助学生进一步深入理解掌握知识点，培养解决复杂问题的能力，训练学以致用的素质）

1. 布置书后作业，北化在线平台提交；
2. 在 MOOC 平台讨论区，展开内容讨论，并及时评价：
3. 在北化在线平台完成课后测试；
4. 在微信群、企业微信群、mooc 平台、线下随时回答解决同学的问题。

基本内容	教学反思
4.1　n 维向量的基本概念 4.2 向量组的线性关系（1） **一、　　案例导引：** 在日常工作、学习和生活中，有许多问题都需要用有序数组来进行描述： 引例 1：某高校大一的王哲同学共修了 8 门课程，课程考核后，从班主任那里拿到了 8 门课程获得的学分记录表	**前测：**引导学生发掘身边的向量形

5	3.8	4.3	4.8	3.4	2.5	3	4

式？

引例 2:随着如今科学技术的不断发展,中国真的是在国际上都走到了前沿,在短短的 17 年时间内就已经发射了 11 艘宇宙飞船，在宇宙的探索中又迈上了更高的一步。那么描述宇宙飞船在太空中的飞行状态，需要知道它的位置(x,y,z)，它的速度(v_x,v_y,v_z)，温度 t 以及空气阻力 u 等物理参数，记飞行状态需要 8 个参数(x,y,z,v_x,v_y,v_z,t,u)来描述。

思政元素:介绍航天事业的伟大成就。

二、 浸入式学习与价值引领

1. n维向量

定义 4.1：n个有次序的数$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$所组成的数组称为$n$维向量，一般用希腊字母$\alpha,\beta,\cdots$等表示，这$n$个数称为该向量的$n$个分量，第$i$个数$a_i$称为第$i$个分量.

分量全为实数的向量称为实向量，分量为复数的向量称为复向量. n维向量可写成一行或一列，分别称为行向量和列向量，也就是行矩阵和列矩阵，本书所讨论的向量，一般情况都是指n维列向量。并规定行向量与列向量都按矩阵的运算规则进行运算，特别列出 8 条线性运算：（1）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

（2）$(a+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

（3）$\alpha+0=0+\alpha$ （4）$\alpha+(-\alpha)=0$

（5）$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$ （6）$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

（7）$(kl)\alpha=k(l\alpha)$ （8）$1\alpha=\alpha$

有了向量的定义后，作为应用，

【例 4.1】 将线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{4.3}$$

表示为向量形式.

解　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$.

因为

$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1a_{11}+x_2a_{12}+\cdots+x_na_{1n}\\x_1a_{21}+x_2a_{22}+\cdots+x_na_{2n}\\\vdots\\x_1a_{m1}+x_2a_{m2}+\cdots+x_na_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1a_{11}\\x_1a_{21}\\\vdots\\x_1a_{m1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2a_{12}\\x_2a_{22}\\\vdots\\x_2a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}x_na_{1n}\\x_na_{2n}\\\vdots\\x_na_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$$

，

所以
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}. \tag{4.4}$$

通常称（4.4）为方程组（4.3）的向量形式. 此时方程组（4.3）的系数矩阵可以表示为 $\boldsymbol{A}=\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ ，增广矩阵可以表示为 $\tilde{\boldsymbol{A}}=\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$.

2.　向量组的概念

定义 4.2: 若干个同维数的列向量(或同维数的行向量)所组成的集合叫做向量组.

矩阵与向量组的对应：一个 $m\times n$ 阶矩阵的全体列向量是一个含 n 个 m 维列向量的向量组，它的全体行向量是一个含 m 个 n 维行向量的向量组.

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{l}\alpha_1=(a_{11}\quad a_{12}\quad\cdots\quad a_{1n})\\\alpha_2=(a_{21}\quad a_{22}\quad\cdots\quad a_{2n})\\\quad\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\\alpha_m=(a_{m1}\quad a_{m2}\quad\cdots\quad a_{mn})\end{array}，\quad \beta_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\cdots\\a_{m1}\end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\cdots\\a_{m2}\end{pmatrix}, \cdots, \beta_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\cdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$$

<table>
<tr>
<td>

3. 向量组的线性相关性

定义 4.3：给定向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$，如果存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使

$k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_ma_m = 0$，则称向量组 A 是线性相关的，否则称它线性无关.

说明：当 $m = 1$ 时，向量组只含一个向量，对于只含一个向量 a 的向量组，当 $a = 0$ 时是线性相关的，当 $a \neq 0$ 时是线性无关的.对于含 2 个向量 a_1, a_2 的向量组，它线性相关的充分必要条件是 a_1, a_2 的分量对应成比例，其几何意义是两个向量共线. 3个向量线性相关的几何意义是三向量共面.

板书演示如下定理

定理 4.1 在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中，若有部分向量线性相关，则全体向量也线性相关. 若全体向量线性无关，则任意部分向量也线性无关.

【证】 不失一般性，设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中部分向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，则存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$，这时，有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r + 0\boldsymbol{\alpha}_{r+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}.$$

因为系数 $k_1, k_2, \cdots, k_r, 0, \cdots, 0$ 不全为零，所以，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关. 剩下的结论用反证法立即可得.

结合第三章的知识，得到如下的定理

定理 4.2 设 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$，则下列三个命题等价：

（1）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关（或无关）；

（2）线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$ 有非零解（或只有零解）；

（3）分别以向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 为列，所构成的矩阵的秩小于向量组的个数，

</td>
<td>

提出问题：
平面和空间中线性相关的几何意义.

中测：雨课堂考察

</td>
</tr>
</table>

即 $R\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\ <s$（或 $R\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\ =s$）.

由此得到如下有用的推论

推论 4.1 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关充要条件是 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=0$.

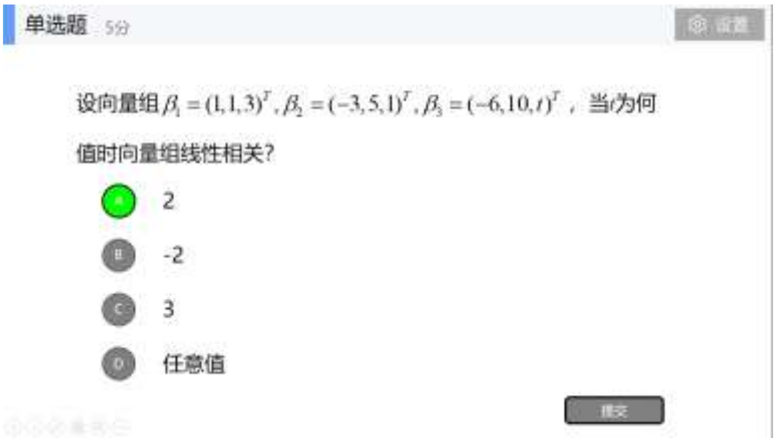
推论 4.2 $n+1$ 个 n 维向量组必线性相关.

【例 4.2】 判断下列向量组的线性相关性：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=\ 1,-1,0\ ^T,\boldsymbol{\alpha}_2=\ 0,1,1\ ^T,\ \boldsymbol{\alpha}_3=\ -1,3,2\ ^T,\boldsymbol{\alpha}_4=\ -2,6,4\ ^T$；

（2）n 基本向量组 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)^T,\boldsymbol{e}_2=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1)^T$.

思路：构造矩阵，用初等行变换将其化为阶梯型的矩阵，得到秩后可判断.



【例 4.3】 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\ 1,1,3\ ^T,\boldsymbol{\beta}_2=\ -3,5,1\ ^T,\boldsymbol{\beta}_3=\ -6,10,t\ ^T$，当 t 为何值时，向量组线性相关？t 为何值时，向量组线性无关？

【解】 构造矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，因为

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&-3&-6\\1&5&10\\3&1&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-3&-6\\0&8&16\\0&10&t+18\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8&16\\10&t+18\end{vmatrix}=8(t-2),$$

所以，当 $t=2$ 时，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关；当 $t\neq 2$ 时，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

下面介绍

定理 4.3 若 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^T\ (i=1,2,\cdots,s)$ 线性无关，则在

内容。

内在联系：

向量组为方阵时的相关性与行列式的关系

每一个向量上添加 m 个分量后所得的 $n+m$ 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in},b_{i1},\cdots,b_{im})^T$, $(i=1,2,\cdots,s)$ 也线性无关. 常称 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的延长向量组，或称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的截短向量组. 定理 4.2 说明：若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则其延长向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也线性无关. 与定理 4.2 等价的命题（即逆否命题）以下面的推论给出. **推论 4.3** 若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关，则其截短向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 也线性相关. **4. 向量组的线性表示** 首先给出一个向量和一个向量组的线性表示关系. **定义 4.6**（向量的线性表示与线性组合） 设 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是一组 n 维向量. 若存在数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ ，使 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ ，则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，或称 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合，并称 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为组合系数. **【例 4.6】** 有关线性表示的例子很多. （1） 零向量 $\mathbf{0}$ 可被任意的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示. 这是因为： $$\mathbf{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m.$$ （2）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中的每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 都可由该向量组线性表示. 这是因为： $\boldsymbol{\alpha}_i=0\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+1\boldsymbol{\alpha}_i+0\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m$. （3）任意一个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 都可以由向量组 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)^T,\boldsymbol{e}_2=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1)^T$ 线性表示. 这是因为： $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+a_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$. 称向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为 n **维基本向量组**.	**提出问题：**引导学生思考与已有定义的等价描述

问题：如何判断向量$\boldsymbol{\beta}$可否由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示呢？

为了解决这个问题，引入如下的

定理 4.4 设m维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$和向量$\boldsymbol{\beta}$，则下列命题等价：

（1）$\boldsymbol{\beta}$可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示；

（2）线性方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$有解；

（3）$R\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\ =R\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}\ $.

为了巩固结论，给出如下

【例 4.7】 判断向量$\boldsymbol{\beta}$可否由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示？若能，写出它的一种表示方式.

$$\boldsymbol{\beta}=\ -5,6,-5,9\ ^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_1=\ 2,0,-1,3\ ^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\ 3,-2,1,-1\ ^T.$$

思路：按照上面定理用初等变换可以解决.

最后这个部分引两个向量组之间的线性表示关系.

定义 4.7（向量组的等价） 设有两个向量组T_1：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$；$T_2$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$.

若向量组T_1中的每一个向量都可以由向量组T_2线性表示，则称向量组T_1能由向量组T_2线性表示； 若向量组T_1与T_2能相互线性表示，则称这两个向量组**等价**.

向量组等价关系是向量组之间的一种关系，这种等价关系具有下列泛性质：

（1）反身性：每一个向量组都与自身等价；

（2）对称性：若向量组T_1与向量组T_2等价，则向量组T_2也与向量组T_1等价；

（3）传递性：若向量组T_1与向量组T_2等价，向量组T_2与向量组T_3等价，则向量组T_1与向量组T_3等价.

三、 回顾和小结

小 结：

能力培养：

化抽象为具体，培养学生抽象思维能力。

1. 线性相关，线性无关的概念； 2. 向量组等价的概念和关系. **四、 复习思考与作业** **思考题：** 1. 向量的线性运算，即加法和数乘有没有直观的几何解释? 2. 使用Matlab软件设计3维向量间线性表示的向量图. **作业题：** 第133-135页，习题4.2： 第3（1)；5；8；9题	**后测：** 拓展性思考题题和课后检测

第（14）次课

<table>
<tr><td>教学章节</td><td>第四章 第 4.2（2）、4.3 节</td><td>学时</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>教材
和参考书</td><td colspan="3">1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书）
2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书）
3. David.C.Lay,线性代数及其应用(英文版),电子工业出版社,2010.（教学参考）
4. Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
5. Jim Hefferon, Linear Algebra, available for free online，2014. （教学参考）
6. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考）
7. 刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学目的：理解向量组的极大无关组和秩的概念，掌握向量组的秩与矩阵秩的关系，掌握求向量组的极大无关组以及线性地表示出其他向量；
2.教学重点：向量组的极大无关组与秩；
3.教学难点：向量组的极大无关组与秩。</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学内容：极大无关组，秩；
2.时间安排：2 学时；
3.教学方法：讲授与讨论相结合；
4.教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc 平台讨论+测试。</td></tr>
<tr><td colspan="4">教学设计：
课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析，培养学生自主学习能力，训练独立思考的素质）：
1. 查看中国大学慕课平台线性代数典型习题讲解中的课程导学，初步了解向量的秩；
2. 复习向量组的线性关系的定义；
3. 学习简单的 MATLAB 关于秩的命令和操作。</td></tr>
</table>

课中检测，并探讨重点、难点知识点（将启发式、互动式和探究式等多种教学方法适时融入教学过程，提高学生课堂学习的深度参与度，培养逻辑思维能力，思辨能力等）：

1．在案例分析引入极大无关组的定义之后，雨课堂完成对极大无关组的应用习题；

2．多种形式的课堂讨论：

① 启发式提问引起课堂讨论：讨论初等变换求解方程组，系数矩阵化为阶梯型矩阵时非零行的个数，从而深入理解特殊秩的含义。

② 教师举例引起课堂讨论：从具体的矩阵出发，将其看成行、列向量组，计算不同的秩，说明行秩等于列秩等于矩阵的秩，由此引发学生结合所学秩的知识延伸学习，改善学生的学习方法。

③ 提问预习结果：秩的原始含义时什么？并加以点评。老师起引导作用，主要锻炼同学利用所学知识分析问题解决问题的能力。

3．翻转课堂：

根据课前布置的任务，翻转课堂，由学生分享秩在说文解字种表达的是秩序的含义。

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况，帮助学生进一步深入理解掌握知识点，培养解决复杂问题的能力，训练学以致用的素质）

1.布置书后作业，北化在线平台提交；

2.在 MOOC 平台讨论区，展开内容讨论，并及时评价：

3.在北化在线平台完成课后测试；

4.在微信群、企业微信群、mooc 平台、线下随时回答解决同学的问题。

基本内容	教学反思

4.2　向量组的线性关系（2）

4.3 向量组的秩

一、　案例导引：

考虑线性方程组 $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x-y+2z=-2, \\ 3x-y+5z=-3. \end{cases}$　　（4.10）

前测： 在空间如何刻画方程是多余的？

如果将每一个方程用向量表示，则 $\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_1 &= 1,1,1,1\ , \\ \boldsymbol{\alpha}_2 &= 1,-1,2,-2\ , \\ \boldsymbol{\alpha}_3 &= 3,-1,5,-3\ . \end{aligned}$

因为向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的对应分量不成比例，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是线性无关的，又容易看出

$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, 所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关. 反映在方程组上就是：第一、第二两个方程的公共解都是第三个方程的解，所以第 3 个方程是多余的，可以把它从方程组中删去，保留前两个方程. 这样求解（4.10）只要求解保留方程就行了. 回顾在第三章中，我们借助矩阵的理论已经知道，保留方程的个数与方程组系数矩阵的秩相等. 然而，在一个线性方程组中，究竟哪些方程是多余的，哪些方程可以用其余方程线性表示？为了借助向量的工具更深入地研究这个问题，需要研究向量组的极大无关组等相关理论.

二、 浸入式学习与价值引领

1. 线性相关性与线性表示之间的联系

向量组的线性相关性与线性表示这一概念有着密切的联系.

定理 4.5 n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$（$s\geq 2$）线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

定理 4.6 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$线性相关，则向量$\boldsymbol{\beta}$可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，且表示法唯一.

思路：按定义可证明,此处可巩固定义.

【例 4.8】 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，向量组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，问

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1$能否由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出？为什么？

（2）$\boldsymbol{\alpha}_4$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出？为什么？

解题思路：结合定义与反证的方式解决问题.

定理 4.7 若 n 维向量组T_1：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由$n$维向量组$T_2$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表出，且$r>s$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关.

【证】 由于向量组T_1：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可以由向量组$T_2$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示，于是

$$\boldsymbol{\alpha}_j = c_{1j}\boldsymbol{\beta}_1 + c_{2j}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + c_{sj}\boldsymbol{\beta}_s = \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{sj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \cdots, r. \qquad (4.9)$$

则（4.9）式写成矩阵的形式有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{C}\text{，其中}\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{s\times r}.$$

因为$r > s$，则矩阵$\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{s\times r}$的秩小于$r$，所以齐次线性方程组$\boldsymbol{CX} = \boldsymbol{0}$有非零解$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix}$，使得

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s \ C \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = 0,$$

即存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_r$使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_1\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_1\boldsymbol{\alpha}_r = \boldsymbol{0}$

成立，故$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关.

与定理 4.7 等价的命题是下面的推论.

推论 4.4 设向量组T_1：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$与$T_2$：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$是两组 n 元向量，若满足（1）$T_1$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关；

（2）向量组T_1可以由向量组T_2线性表出；

则$r \le s$.

2. 向量组的极大无关组与秩

定义 4.7（向量组的极大线性无关组）设向量组T的一个部分组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$满足：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关；

（2）对于向量组T中任取的一个向量$\boldsymbol{\alpha}$，都有$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关.

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$为该向量组$T$的一个极大线性无关组，简称极大无关组.

【例 4.9】 设向量组

$\boldsymbol{T}$: $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(c_1,c_2,c_3,0)^T$，

验证$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是一个极大无关组，并将$\boldsymbol{\alpha}_4$用这个极大无关组线性表示.

【解】 因为 3 维基本向量组$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^T,\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^T,\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^T$线性无关，所以它的延长向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1,0)^T$也线性无关，又因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_4&=(c_1,c_2,c_3,0)^T=(c_1,0,0,0)^T+(0,c_2,0,0)^T+(0,0,c_3,0)^T+(0,0,0,0)^T\\&=c_1(1,0,0,0)^T+c_2=(0,1,0,0)^T+c_3(0,0,1,0)^T+0(0,0,0,0)^T,\end{aligned}$$

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是向量组$T$的一个极大无关组.

【例 4.10】 在向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,5,1,0)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,6,8)^T$中，验证$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$就是向量组的一个极大无关组.

【解】 首先由于$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，故$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$线性无关，又由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$对应分量不成比例，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关.如果再添入$\boldsymbol{\alpha}_3$后，由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$对应分量成比例，故线性相关，从而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$也线性相关.于是可知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$就是向量组的一个极大无关组.不难验证，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$也是向量组的一个极大无关组.

从例 4.10 可以看出，一个向量组的极大无关组一般来说不是唯一的.但同一向量组的两个不同的极大无关组所包含的向量个数是相同的.

一般地，有下面的定理。

定理 4.8 一个向量组的任意两个极大无关组所含的向量个数相同.

【证】 设$\boldsymbol{T}_{r1}$和$\boldsymbol{T}_{r2}$是向量组$\boldsymbol{T}$的任意两个极大无关组.由极大无关组的定义 4.7 可知，$\boldsymbol{T}_{r1}\cong\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}_{r2}\cong\boldsymbol{T}$，于是有$\boldsymbol{T}_{r1}\cong\boldsymbol{T}_{r2}$，再根据推论 4.4 可知，$\boldsymbol{T}_{r1}$

互动讨论:

雨课堂线上讨论，引出极大无关组不唯一.

和$\boldsymbol{T}_{r2}$所含向量个数相同.

定理 4.8 表明，一个向量组的极大无关组所含向量个数与极大无关组的选择无关，它反映了向量组本身的特征，也正是向量组的一个重要特征——向量组秩的概念.

定义 4.8（向量组的秩）向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的极大无关组所含向量的个数，称为该向量组的秩，记为$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$。并规定线性相关向量组的秩为零.

将之前的结论用秩重新书写后得

定理 4.9 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关的充要条件是$R\ \ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\ \ =s$.

定理 4.10 秩为r的向量组中，任意含有r个向量的线性无关的部分组都是向量组的极大线性无关组.

定理 4.11 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$等价，则

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s).$$

3. 向量组的秩与矩阵秩的关系

提出问题：与前面矩阵的秩有什么关系?

问题：任意 m×n 阶矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}=(\alpha_1,\alpha_{2,},\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\beta_1^T\\ \beta_2^T\\ \vdots\\ \beta_m^T\end{pmatrix}$，称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组，这个列向量组的秩为矩阵$\boldsymbol{A}$的列秩；称向量组$\boldsymbol{\beta}_1^T,\boldsymbol{\beta}_2^T,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^T$为矩阵$\boldsymbol{A}$的行向量组，行向量组$\boldsymbol{\beta}_1^T,\boldsymbol{\beta}_2^T,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^T$的秩为矩阵$\boldsymbol{A}$的行秩. 那么，矩阵的秩和向量组的秩之间有什么关系呢?

若对矩阵$\boldsymbol{A}=\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 作初等行变换，得到矩阵$\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$行等价，那么它们的列向量组之间有什么关系呢?

定理 4.12 矩阵$\boldsymbol{A}$经过初等行变换化为矩阵$\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{A}$的列向量组的任意一部分组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$与它在$\boldsymbol{B}$中对应的部分组$\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$具有完全相同的线性关系，即一组数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_{i_r}=\boldsymbol{0}\quad 当且仅当\ \lambda_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\beta}_{i_r}=\boldsymbol{0}.$$

【证】 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$.

因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$，所以齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}X=\boldsymbol{0} \text{ 与 } \boldsymbol{B}X=\boldsymbol{0} \text{ 同解，}$$

也即向量方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0} \text{ 与 } x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{0} \text{ 同解，}$$

于是，列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 有相同的线性相关性.

对部分组的情形，记

$\boldsymbol{P_A}$ 是以 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为列向量的矩阵；

$\boldsymbol{P_B}$ 是以 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 为列向量的矩阵；

则 $\boldsymbol{P_B}$ 是由 $\boldsymbol{P_A}$ 经过初等变换而得到的，对 $\boldsymbol{P_A}$ 和 $\boldsymbol{P_B}$ 用已证的结果即得.

推论 4.5 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，则

（1）$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个极大无关组的充要条件是 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的一个极大无关组.

（2）$\boldsymbol{A}$ 的列秩等于 $\boldsymbol{B}$ 的列秩.

证明思路：使用初等行变换与方程组同解间的关系可证明.

现在我们可以建立向量组的秩与矩阵秩的关系.

定理 4.13 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于它的列秩，也等于它的行秩.

【证】 先证 $\boldsymbol{A}$ 的列秩等于 $R(\boldsymbol{A})$. 设 $R(\boldsymbol{A})=r$，则 $\boldsymbol{A}$ 可通过初等行变换化为行简化阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$，且 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$ 因为初等变换不改变矩阵的秩，且初等行变换不会改变矩阵的列秩，所以 $\boldsymbol{B}$ 的列秩等于 $R(\boldsymbol{B})$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的列秩等于 $R(\boldsymbol{A})$，又因为 $\boldsymbol{A}$ 的行秩=$\boldsymbol{A}^T$ 的列秩=$R(\boldsymbol{A}^T)=R(\boldsymbol{A})$.

结合推论 4 .5 和定理 4.13，归纳如下求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩和极大无关组的方法：

（1）以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为列向量作矩阵 $\boldsymbol{A}$；

（2）对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换，将 $\boldsymbol{A}$ 化为行简化形矩阵 $\boldsymbol{B}$，这时矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 有相同的线性相关性，所以 $\boldsymbol{B}$

方法总结：求向量组极大无关组的方法.

的列向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的极大无关组$\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$对应的向量组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$就是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的极大无关组；

（3）矩阵$\boldsymbol{B}$容易看出列向量由极大无关组$\boldsymbol{\beta}_{i_k}(k=1,2,\cdots,r)$线性表示的系数，从而就可知道向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$由极大无关组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性表示的系数.

【例 4.11】 设向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,5,-3)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-1,-2,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(5,4,-19,15)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-10,-1,16,-15)^T$，

（1）向量组的秩；

（2）求向量组的一个极大无关组，并把其余向量由极大无关组线性表示.

【解】（1）以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为列构造矩阵$\boldsymbol{A}$，并利用初等行变换把$\boldsymbol{A}$化为行简化形梯形阵$\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)=\begin{pmatrix}1&4&5&-10\\-2&-1&4&-1\\5&-2&-19&16\\-3&3&15&-15\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-5r_1\\r_4+3r_1}]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&4&5&-10\\0&7&14&-21\\0&-22&-44&66\\0&15&30&-45\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{22}r_3,\frac{1}{15}r]{\frac{1}{7}r_2}\begin{pmatrix}1&4&5&-10\\0&1&2&-3\\0&-1&-2&3\\0&1&2&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&4&5&-10\\0&1&2&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-4r_2}\begin{pmatrix}1&0&-3&2\\0&1&2&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\triangleq\boldsymbol{B},$$

所以，$R(\boldsymbol{A})=2$，故列向量组的秩是 2；

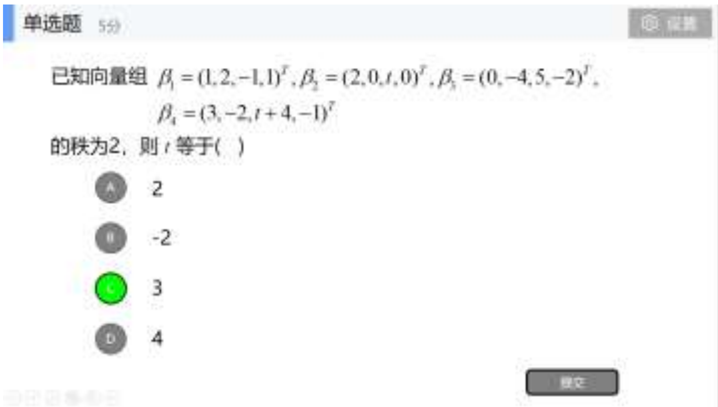
（2）由（1）知，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的极大无关组包含有 2 个向量. 如果

$$\text{记}\,\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\right),$$

显然，$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0,0)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,0,0)^T$为矩阵$\boldsymbol{B}$的列向量组的极大无关组，并且$\boldsymbol{\beta}_3=-3\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4=2\boldsymbol{\beta}_1-3\boldsymbol{\beta}_2$，根据定理 4.12 可知，

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,5,-3)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-1,-2,3)^T$$

为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2$.



例 4.12 已知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,-1,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(2,0,t,0)^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=(0,-4,5,-2)^T$，$\boldsymbol{\beta}_4=(3,-2,t+4,-1)^T$ 的秩为 2，试求 t 的值.

【解】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\2&0&-4&-2\\-1&t&5&t+4\\1&0&-2&-1\end{pmatrix}$，则对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换化为行阶梯形矩阵得到

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\2&0&-4&-2\\-1&t&5&t+4\\1&0&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3+r_1}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-4&-4&-8\\0&t+2&5&t+7\\0&-2&-2&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+2r_2]{\substack{-\frac{1}{2}r_2\\r_3-2r_2}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&1&2\\0&t&3&t+3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-tr_2}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&1&2\\0&0&3-t&-t+3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

，

因为 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=2$，所以必有 $\begin{cases}3-t=0,\\-t+3=0,\end{cases}$ 从而 $t=3$.

8. 回顾和小结

小 结：

1. 向量组的秩；

中测： 向量组秩的判定

2. 与矩阵秩的关系 **9. 复习思考与作业** **思考题：** 1. 用初等行变换求极大无关组的理论依据是什么？ 2. 矩阵 3 种秩之间的关系？ **作业题：** 第 141-143 页，习题 4.3： 第 3（2）；5；9；10	**后测：** 拓展性思考题题和课后检测

第（15）次课

<table>
<tr><td>教学章节</td><td>第四章 第 4.2、4.3 节内容梳理</td><td>学时</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>教材
和参考书</td><td colspan="3">1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书）
2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书）
3. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考）
4. Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra，Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
5. Jim Hefferon，Linear Algebra，available for free online，2014. （教学参考）
6. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考）
7. 刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学目的：梳理向量组的极大无关组和秩的概念，向量组的秩与矩阵秩的关系，求向量组的极大无关组以及线性地表示出其他向量的常用方法。
2.教学重点：向量组的极大无关组与秩；
3.教学难点：向量组的极大无关组与秩。</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学内容：极大无关组，秩；
2.时间安排：2 学时；
3.教学方法：讲授与讨论相结合；
4.教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc 平台讨论+测试。</td></tr>
<tr><td colspan="4">教学设计：
课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析，培养学生自主学习能力，训练独立思考的素质）：
1. 完成中国大学慕课平台线性代数典型习题讲解中的课程导学，复习极大无关组和秩；
2. 从方程组的角度思考秩与解的关系；
课中检测，并探讨重点、难点知识点（将启发式、互动式和探究式等多种教学方法适时融入教学过程，提高学生</td></tr>
</table>

课堂学习的深度参与度，培养逻辑思维能力，思辨能力等）：

多种形式的课堂讨论：

① 启发式提问引起课堂讨论：讨论线性相关、线性无关的等价描述，从而深入理解线性相关和无关含义及性质。

② 教师举例引起课堂讨论：从行和列的角度理解线性方程组，说明向量线性关系的作用，由此引发学生结合所学向量知识延伸学习，改善学生的学习方法。

③ 提问预习结果：矩阵的行秩和列秩是什么？他们的关系如何？并加以点评。老师起引导作用，主要锻炼同学利用所学知识分析问题解决问题的能力。

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况，帮助学生进一步深入理解掌握知识点，培养解决复杂问题的能力，训练学以致用的素质）

1. 布置书后作业，北化在线平台提交；
2. 在 MOOC 平台讨论区，展开内容讨论，并及时评价：
3. 在北化在线平台完成课后测试；
4. 在微信群、企业微信群、mooc 平台、线下随时回答解决同学的问题。

基本内容	教学反思
4.2-4.3 内容梳理 **一、 浸入式学习与价值引领** **1. 向量组线性相关性总结** ① 零向量是任何向量的线性组合,零向量与任何同维实向量共线. ② 单个零向量线性相关；单个非零向量线性无关. ③ 部分相关,整体必相关；整体无关,部分必无关. ④ 原向量组无关,延长向量组无关；原向量组相关，缩短向量组相关.（注意必须相同位置增加或减少） ⑤ 两个向量线性相关$\Leftrightarrow$对应元素成比例；两两正交的非零向量组线性无关. ⑥ 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关$\Leftrightarrow$向量组中至少有一个向量可由其余$n-1$个向量线性表示. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关$\Leftrightarrow$向量组中每一个向量$\alpha_i$都不能由其余$n-1$个向量线性表示. ⑦ 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$线性相关,则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示,且表	**前测：**总结线性关系的等价表述

示法惟一. ⑧ 矩阵的行向量组的秩等于列向量组的秩,阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的个数. ⑨ 矩阵的行初等变换不改变矩阵的秩,且不改变列向量间的线性关系. 矩阵的列初等变换不改变矩阵的秩,且不改变行向量间的线性关系. **例题选讲:** 【例 1】(2003)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 的非零矩阵,方程组 $AX=0$ 只有零解的充分必要条件是【　　】. A. A 的列向量组线性无关　B. A 的列向量组线性相关 C. A 的行向量组线性无关　D. A 的行向量组线性相关 【答案】A.考察齐次方程组只有零解的秩法判定、三秩相等原理、向量组相关性的秩法判定、之间的紧密联系. 提示: $AX=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n\Leftrightarrow A$ 的列向量组的秩 $=n\Leftrightarrow A$ 的列向量组线性无关. 【例 2】(2004)若向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关,而向量 $\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\gamma},3\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关,则 $k=$【　　】. **A.3　B.2　C.−2　D.−3** 【答案】D. 本题考察两个向量组线性相关性的重要结论。由于 $\left(\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\gamma},3\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}\right)=\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\right)\boldsymbol{C}$,其中 $\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{2}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{k}&\mathbf{3}\end{vmatrix}=\mathbf{2}(\boldsymbol{k}+\mathbf{3})$,于是 $\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\gamma},3\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关的 $\Leftrightarrow \lvert C\rvert=0$,故 $k=-3$. 【例 3】(2006)若向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关,则 $k\neq1$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关的【　　】. A. 充分必要条件　B. 充分条件但非必要条件 C. 必要条件但非充分条件　D. 既非充分也非必要条件 【答案】C. 本题考察两个向量组线性相关性的重要结论和充分必要条件的概念。由于 $\left(\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}\right)=\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\right)\boldsymbol{C}$,其中 $\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\boldsymbol{k}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{k}&\mathbf{-1}\end{vmatrix}=\boldsymbol{k}^2-\mathbf{1}=(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})$,于是	**中测:** 通过例题选讲加深理解

$\boldsymbol{\alpha+2\beta,2\beta+k\gamma,3\gamma+\alpha}$ 线性无关的 $\Leftrightarrow |C|\neq 0 \Leftrightarrow k\neq -1$ 且 $k\neq 1$.故选项为 C.

2. 向量组的极大无关组与秩的关系总结

A 经过有限次初等变换化为 B. 记作：$A\cong B$

① 矩阵 A 与 B 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)\neq> A,B$ 作为向量组等价，即：秩相等的向量组不一定等价.

矩阵 A 与 B 作为向量组等价 $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\Rightarrow$ 矩阵 A 与 B 等价.

② 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ $=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\Rightarrow r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\leqslant r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

③ 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，且 $s>n$，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关.（“多”被“少”线性表出，“多”必线性相关）或者对称地有

向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关，且可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，则 $s\leqslant n$.

④ 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，且 $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则两向量组等价；

⑤ 任一向量组和它的极大无关组等价.

⑥ 向量组的任意两个极大无关组等价，且这两个组所含向量的个数相等.

⑦ 若两个线性无关的向量组等价，则它们包含的向量个数相等.

⑧ 若 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 $r(A)\leq\min\{m,n\}$，若 $r(A)=m$，A 的行向量线性无关；

若 $r(A)=n$，A 的列向量线性无关，即：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

线性方程组的矩阵式 $Ax=\beta$　　向量式 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad \alpha_j=\begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{bmatrix}, j=1,2,\cdots,n$$

方程组解的相关结论总结：

β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示$\Leftrightarrow Ax=\beta$有解

$$\Leftrightarrow r(A)=r(A\vdots\beta)\begin{cases} <n\left\langle\begin{array}{l}\Leftrightarrow Ax=\beta\text{有无穷多解}\left\langle\begin{array}{c}\Rightarrow\\ <\neq\end{array}\right\rangle Ax=0\text{有非零解}\xrightarrow{\text{当}A\text{为方阵时}}|A|=0\\ \Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性相关}\end{array}\right. \\ =n\left\langle\begin{array}{l}\Leftrightarrow Ax=\beta\text{有唯一组解}\left\langle\begin{array}{c}\Rightarrow\\ <\neq\end{array}\right\rangle Ax=0\text{只有零解}\xrightarrow{\text{当}A\text{为方阵时}}|A|\neq 0\\ \Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性无关}\\ \xrightarrow{\text{当}A\text{为方阵时}}\text{克莱姆法则}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\beta\text{不可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性表示}\Leftrightarrow Ax=\beta\text{无解}\begin{cases}\Leftrightarrow r(A)\neq r(A\vdots\beta)\\ \Leftrightarrow r(A)<r(A\vdots\beta)\\ \Leftrightarrow r(A)+1=r(A\vdots\beta)\end{cases}$$

例题选讲：

【例 4】(2008)若向量$\boldsymbol{\alpha_1=(1\quad 0\quad 1\quad 1)^T,\alpha_2=(0\quad -1\quad t\quad 2)^T,\alpha_3=(0\quad 2\quad -2\quad -4)^T}$，

$\boldsymbol{\alpha_4=(2\quad 1\quad 3t-2\quad 0)^T}$的秩为 2，则$t=$【　　】.

A.-1　　B.0　　C.1　　D.-2

【答案】C. 本题考察分量具体的向量组的初等变换由秩反求参数法.

【例 5】(2005)设向量$\boldsymbol{\alpha_1=(0\quad 2\quad 1\quad 1)^T,\alpha_2=(-1\quad -1\quad -1\quad -1)^T}$,

$\boldsymbol{\alpha_3=(1\quad -1\quad 0\quad 0)^T}$，$\boldsymbol{\alpha_4=(0\quad 0\quad 1\quad -1)^T}$，则向量组$\boldsymbol{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)}$的一个极大无关组是

【　　】.

A.α_3,α_4　B.$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$　C.$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　D.$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

【答案】D. 本题考察分量具体的向量组的极大无关组的求法.

【例 6】(2010)设向量组$\boldsymbol{S=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}}$线性无关，下列向量组中，与$\boldsymbol{S}$等价的有【　　】个.

A. $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3$； B. $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$；

C. $\alpha_1-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3,2\alpha_1,3\alpha_3$ ； D. $\alpha_1-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3,2\alpha_2,3\alpha_3$.

【答案】B. 提示：两个向量组等价的必要条件是两者的秩相等. 因为向量组 A，C，D 的秩为 2，向量组 B 的秩为 3，所以 B 选项为正确答案。

【例 7】(2009) 设向量 $\boldsymbol{\alpha_1=(1\quad 2\quad 0)^T}$，$\boldsymbol{\alpha_2=(2\quad 3\quad 1)^T}$，$\boldsymbol{\alpha_3=(0\quad 1\quad -1)^T}$，$\boldsymbol{\beta=(3\quad 5\quad k)^T}$. 若 β 可由 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ 线性表示，则 $k=$【 】.

A.-2 B.-1 C.1 D.2

【答案】C. 本题考察一个向量 β 可由一个向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示的秩判定法，即. $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)$. 提示：

$$\begin{pmatrix}1&2&0&3\\2&3&1&5\\0&1&-1&k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-1\\0&1&-1&k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-1\\0&0&0&k-1\end{pmatrix},\text{故 } k=1.$$

【例 8】(2007)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1&-1\\1&a^2&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b=(-1\quad -1\quad a)^T}$，则当 $a=$【 】时，方程组 $AX=b$ 无解.

A.-2 B.-1 C.1 D.2

【答案】D. 本题考察非齐次方程组有解的充要条件. 方程组 $AX=b$ 无解 $\Rightarrow |A|=0$，于是

$$\begin{vmatrix}1&1&a\\0&1&-1\\1&a^2&-1\end{vmatrix}=a^2\text{-}a-2=(a-2)(a+1)=0\Rightarrow a=2\text{或}a=-1$$，但当 $a=-1$ 时，

$$(A\ \ b)=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&1&-1&-1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow r(A\ \ b)=r(A)$$，与方程组无解矛盾，故舍去.

后测：拓展性思考题题和课后检测

【例 9】(2008)若线性方程组$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$有无穷多解，则$a=$【　　】.

A.-1或4　B.1或-4　C.1或4　D.-1或-4

【答案】A.本题考察齐次方程组有非零解的充要条件.提示：

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{2}-\boldsymbol{a} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a}+\mathbf{1} & \mathbf{1}+\boldsymbol{a} \end{vmatrix}=(\boldsymbol{a}+\mathbf{1})\begin{vmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{2}-\boldsymbol{a} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix}=(\boldsymbol{a}+\mathbf{1})(\boldsymbol{a}-\mathbf{4})=\mathbf{0}$$，$a=-1$或4.

【例 10】(2010)线性方程组$\begin{cases} 4x_1+tx_2+x_3=1, \\ \qquad 4x_2+5x_3=1, \\ -x_1+\ x_2+x_3=0, \\ -5x_1+x_2 \qquad =-1 \end{cases}$，当【　　】.

A.$t\neq 0$时无解；*B*.$t\neq 0$时有无穷多解；*C*.$t=0$时无解；*D*.$t=0$时有无穷多解

【答案】D. 本题考察非齐次方程组有解的充要条件.

$$\begin{pmatrix} 4 & t & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ -5 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & t & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & t+4 & 5 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$，

$t=0\Leftrightarrow r\left(A\,b\right)=r\left(A\right)=1<3$，故正确选项为 D。

【例 11】(2011)若方程组$\begin{cases} x_1+\ x_2+ax_3=0, \\ -x_1+ax_2+x_3=a^2, \\ \qquad x_2+x_3=-4 \end{cases}$有解，则其中$a=$【　　】.

A.3；*B*.2；*C*.-2；*D*.-4

【答案】C. 本题考察非齐次方程组有解的充要条件.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ -1 & a & 1 & a^2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & a & a^2+4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & (a+2)^2 \end{pmatrix}$$故$a=-2$.

【例 12】(2006) 设三阶矩阵 A 的秩 $\boldsymbol{r(A)=1}$, $\boldsymbol{\eta_1=\left(-1\quad 3\quad 0\right)^T}$, $\boldsymbol{\eta_2=\left(2\quad -1\quad 1\right)^T}$，$\boldsymbol{\eta_3=\left(5\quad 0\quad k\right)^T}$是方程组$AX=0$的三个解向量，则常数$k=$【　　】.

A.-2　　B.-1　　C.2　　D.3

【答案】D.本题考察齐次方程组基础解系的定理、解的判定、解的性质. 提示：方程组$AX=0$的基础解系所含向量的个数为$n-r(A)=3-1=2$，于是线性无关的解的个数最多为2，因此η_1,η_2,η_3必线性相关，故$\begin{vmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}-1 & 2 & 5\\ 3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & k\end{vmatrix}=-5k+15=0\Rightarrow k=3$.

二、　回顾和小结

小　结：

1. 向量组的线性关系总结；
2. 向量组的秩与矩阵秩的关系总结

三、　复习思考与作业

思考题：

1. 从向量组角度定义的秩和行列式定义的秩有什么关系？
2. 从行和列的角度看线性方程组解的关系？

作业题：

第 141-143 页，习题 4.3： 第 4（1）；6；7；8

第（16）次课

<table>
<tr><td>教学章节</td><td>第四章 第 4.4 节（1）</td><td>学时</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>教材
和参考书</td><td colspan="3">1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书）
2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书）
3. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考）
4. Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra，Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
5. Jim Hefferon，Linear Algebra，available for free online，2014. （教学参考）
6. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考）
7. 刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学目的：了解向量空间的定义，熟悉常见的例子，理解子空间和维数的概念，熟悉低维的例子，理解基的定义和性质，能够用基确定坐标。
2.教学重点：向量空间的定义，维数和坐标；
3.教学难点：向量空间的定义，维数和坐标。</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学内容：向量（子）空间，维数，基，坐标；
2.时间安排：2 学时；
3.教学方法：线上、线下相结合的上课方式；
4.教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc 平台讨论+测试。</td></tr>
<tr><td colspan="4">教学设计：
课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析，培养学生自主学习能力，训练独立思考的素质）：
1. 查看中国大学慕课平台线性代数典型习题讲解中的课程导学，初步了解向量空间的定义；
2. 从地球上确定物体的位置出发理解坐标的定义；</td></tr>
</table>

3. 了解 MATLAB 软件，学习简单的 MATLAB 语句。

课中检测，并探讨重点、难点知识点（将启发式、互动式和探究式等多种教学方法适时融入教学过程，提高学生课堂学习的深度参与度，培养逻辑思维能力，思辨能力等）：

多种形式的课堂讨论：

① 启发式提问引起课堂讨论：讨论向量空间阵的基底与极大无关组的关系，从而深入理解基向量的含义。

② 教师举例引起课堂讨论：举出参考系的应用案例，说明坐标的作用，深层次含义，由此引发学生结合所学向量知识延伸学习，改善学生的学习方法。

③ 提问预习结果：向量空间的线性运算是什么？他们满足什么运算性质？并加以点评。老师起引导作用，主要锻炼同学利用所学知识分析问题解决问题的能力。

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况，帮助学生进一步深入理解掌握知识点，培养解决复杂问题的能力，训练学以致用的素质）

1. 布置书后作业，北化在线平台提交；
2. 在 MOOC 平台讨论区，展开内容讨论，并及时评价：
3. 在北化在线平台完成课后测试；
4. 在微信群、企业微信群、mooc 平台、线下随时回答解决同学的问题。

基本内容	教学反思
第4.4节　n维向量空间（1） **一、　浸入式学习与价值引领** **1.　向量空间的概念** **定义** 4.10 设V为n维向量组成的集合。如果V非空，且对于向量加法及数与向量的乘法两种运算封闭，即对任意的$\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\beta}\in V$和常数$k$，都有 $$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V,\quad k\boldsymbol{\alpha}\in V$$ 那么就称集合V为一个向量空间. **【例** 4.14**】** 判别下列集合是否为向量空间. （1）全体实n维向量的集合，记为 $$R^n=\left\{\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\middle\| a_i\in R,i=1,2,\cdots,n\right\};$$ （2）$V_1=\left\{\boldsymbol{x}=(0,x_2,\cdots,x_n)^T\middle\| x_2,\cdots,x_n\in R\right\};$	**前测：**从物理学的角度如何将 3 维世界推广到更高的维度？

（3）$V_2=\left\{\boldsymbol{x}=\left(1,x_2,\cdots,x_n\right)^T \middle| x_2,\cdots,x_n\in R\right\}$；

（4）实 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\in R^n$ 的线性组合构成的集合，记为

$$W=\left\{\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots k_s\boldsymbol{\alpha}_s \middle| k_i\in R, i=1,2,\cdots,s\right\}.$$

解（1）对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}=\ a_1,a_2,\cdots,a_n\ ^T\in V,\boldsymbol{\beta}=\ b_1,b_2,\cdots,b_n\ ^T\in V$ 和常数 k，都有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\left(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n\right)^T\in R^n,\ k\boldsymbol{\alpha}=\left(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n\right)^T\in R^n.$$

故 R^n 是向量空间，称为 n 维实向量空间.

（2）对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}=\ 0,a_2,\cdots,a_n\ ^T\in V_1,\boldsymbol{\beta}=\ 0,b_2,\cdots,b_n\ ^T\in V_1$ 和常数 k，都有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\left(0,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n\right)^T\in V_1,\ \ k\boldsymbol{\alpha}=\left(0,ka_2,\cdots,ka_n\right)^T\in V_1.$$

故 V_1 是向量空间. 特别的，当 $\boldsymbol{x}=\left(0,0,\cdots,0\right)^T$ 时，$V_1=\{\boldsymbol{0}\}$ 称为零空间.

（3）若 $\boldsymbol{\alpha}=\ 1,a_2,\cdots,a_n\ ^T\in V_2,\boldsymbol{\beta}=\ 1,b_2,\cdots,b_n\ ^T\in V_2$，则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\left(2,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n\right)^T\notin V_2.$$

故 V_2 不是向量空间.

（4）由 $\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_s\in W$，有 $\boldsymbol{W}$ 是非空集合.

对于 W 中任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_s\boldsymbol{\alpha}_s$，有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(k_1+l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_s+l_s)\boldsymbol{\alpha}_s\in W.$$

对于任意 $\lambda\in R$，有

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\lambda k_s)\boldsymbol{\alpha}_s\in W.$$

故 $\boldsymbol{W}$ 是向量空间. 称 $\boldsymbol{W}$ 是由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 生成或张成的子空间，一般记为 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 或 $\mathrm{Span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$.

定义 4. 11 设有向量空间 V_1 与 V_2，若 $V_1\subset V_2$，则称 V_1 是 V_2 的子空间.

例如，由n维向量所组成的任何向量空间V，总有$V\subset R^n$，所以，由n维向量组成的向量空间总是$\boldsymbol{R}^n$的子空间．特别地，称零空间$V=\{\boldsymbol{0}\}$是$\boldsymbol{R}^n$的零子空间，整个空间$\boldsymbol{R}^n$也是它本身的一个子空间，这两个子空间，称为$\boldsymbol{R}^n$的平凡子空间. **【例 4.15】** 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示，试证： $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$是$L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$子空间. **证明** 设$\boldsymbol{x}\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$，则$\boldsymbol{x}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示，所以$\boldsymbol{x}$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示，从而$\boldsymbol{x}\in L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$．故$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\subset L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$，即$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$是$L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$子空间. **2. n维向量空间的基、维数和坐标** **定义** 4.12 如果向量空间$\boldsymbol{V}$中的s个向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$若满足： （1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关； （2）$\boldsymbol{V}$中的任一向量$\boldsymbol{\alpha}$都可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示. 则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是向量空间$\boldsymbol{V}$的一个基（或基底），向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$分别称为基向量，基向量的个数$s$称为向量空间的维数，记为$\dim V$，并称$\boldsymbol{V}$是$s$维向量空间。 **注** 如果向量空间没有基，规定它的维数为 0，这时向量空间只有一个零向量，即零空间没有基，它的维数为 0. 此外，若把向量空间V看做向量组，这时向量空间的基就是向量组的一个极大线性无关组，向量空间的维数就是向量组的秩. **【例 4.16】** 求R^n的一组基和维数.	**教学思考**：比较和极大无关组的联系?

解 在 R^n 中，n 基本向量组

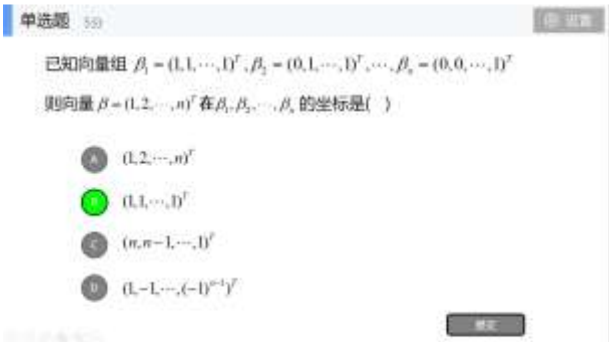
$$e_1=(1,0,\cdots,0)^T, e_2=(0,1,\cdots,0)^T, \cdots, e_n=(0,0,\cdots,1)^T$$

显然是线性无关的，并且对任意 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n$ 有 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$，因而 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为 R^n 的一个基，且 $\dim R^n=n$.

定理 4.18　设 W 是任何 n 维向量构成的向量空间，则必有 $\dim W\le n$.

【证】 因为 W 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的子空间，所以 W 的基可由 $\boldsymbol{R}^n$ 的基线性表示，故 $\dim W\le n$.

定义 4.13 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 r 维向量空间 V 的一个基，对 $\boldsymbol{\beta}\in V$，中任意一个向量 $\boldsymbol{\beta}$，总有且仅有一组有序数 $x_1,x_2,\cdots,x_r$，使得 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r$ 成立，则称 $(x_1,x_2,\cdots,x_r)^T$ 为向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 下的坐标(coordinates).



【例 4.17】 设向量组

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,\cdots,1)^T, \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,\cdots,1)^T, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n=(0,0,\cdots,1)^T.$$

（1）证明：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是向量空间 R^n 的一个基；

（2）求 R^n 中的向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,2,\cdots,n)^T$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标.

解 作矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n,\boldsymbol{\beta})$，利用初等行变换将 $\boldsymbol{B}$ 化为行阶梯形，可得

中测： 坐标的计算

能力培养： 化抽象为具体，培养学生抽象思维能力。

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&\cdots&0&1\\1&1&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&0&\vdots\\1&1&\cdots&1&n\end{array}\right)\xrightarrow{r_i-r_{i-1},i=n,n-1,\cdots,2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&\cdots&0&1\\0&1&\cdots&0&1\\\vdots&\vdots&&0&\vdots\\0&0&\cdots&1&1\end{array}\right),$$ 因为初等行变换不改变矩阵列向量组的线性关系，所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性无关，故它为$R^n$的一个基. 又$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_n$，所以$\boldsymbol{\beta}=(1,2,\cdots,n)^T$在$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的坐标为$(1,1,\cdots,1)^T$. **二、　回顾和小结** **小 结：** 1. 向量空间，子空间； 2. 基和维数 **三、　复习思考与作业** **思考题：** 1. 比较基与极大无关组的概念的关系。 2. 不同基引起坐标间的关系如何？ **作业题：** 课本 P148，习题 4.4：1、2、3	**后测：**拓展性思考题题和课后检测

第（17）次课

<table>
<tr><td>教学章节</td><td>第四章 第 4.4 节（2）</td><td>学时</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>教材
和参考书</td><td colspan="3">1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书）
2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书）
3. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考）
4. Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra，Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
5. Jim Hefferon，Linear Algebra，available for free online，2014. （教学参考）
6. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考）
7. 刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学目的：理解过渡矩阵的概念，不同基会引起坐标之间的变换，理解基变换引起的坐标的关系，更一般的线性空间的定义；
2.教学重点：过渡矩阵，基变换和坐标变换，线性空间；
3.教学难点：过渡矩阵，基变换和坐标变换，线性空间。</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学内容：过渡矩阵，基，坐标，线性空间；
2.时间安排：2 学时；
3.教学方法：线上、线下相结合的上课方式；
4.教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc 平台讨论+测试。</td></tr>
<tr><td colspan="4">教学设计：
课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析，培养学生自主学习能力，训练独立思考的素质）：
1. 观看中国大学慕课平台线性代数典型习题讲解中的课程导学，初步了解过度矩阵的定义；
2. 思考不同基底引起的坐标之间的关系；</td></tr>
</table>

课中检测，并探讨重点、难点知识点（将启发式、互动式和探究式等多种教学方法适时融入教学过程，提高学生课堂学习的深度参与度，培养逻辑思维能力，思辨能力等）：

1．多种形式的课堂讨论：

① 启发式提问引起课堂讨论：讨论向量空间基与极大无关组的关系，从而深入理解向量空间基的含义。

② 教师举例引起课堂讨论：举出当选择不同基底时就会出现坐标不同的问题，引起学生讨论坐标变换的原因，说明过渡矩阵的作用，深层次含义，由此引发学生结合所学矩阵知识延伸学习，改善学生的学习方法。

2．翻转课堂：

根据课前布置的任务，翻转课堂，由学生类比后总结更一般的线性空间的的定义和例子。

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况，帮助学生进一步深入理解掌握知识点，培养解决复杂问题的能力，训练学以致用的素质）

1.布置书后作业，北化在线平台提交；

2.在 MOOC 平台讨论区，展开内容讨论，并及时评价：

3.在北化在线平台完成课后测试；

4.在微信群、企业微信群、mooc 平台、线下随时回答解决同学的问题。

基本内容	教学反思
第4.4节　n维向量空间（2） **一、　浸入式学习与价值引领** **1.　n维向量空间的基、维数和坐标** 由上节课的两个例子可知，R^n 的基不是唯一的，事实上，有下面定理. **定理** 4.19 向量空间 R^n 中任意 n 个线性无关的向量所组成的向量组都是 R^n 的一个基. **证** 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是向量空间 R^n 的任一线性无关的向量组，定义 4.12 中的条件（1）自然满足. 对 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，由 $\dim V=n$，有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关（向量的个数大于向量的维数）. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，可知 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出，且表出方式唯一. 定义 4.12 中的条件（2）也满足，	**前测：** 如何从向量组等价的角度理解基不唯一的定理？

所以，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$R^n$的一个基. 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是向量空间$V$的一个基，则向量空间$V$可表示为 $$V=\{\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s \mid \lambda_i\in\boldsymbol{R},i=1,2,\cdots,s\}$$ 即向量空间可以看成是由其基所生成的向量空间，这就对向量空间的结构比较清楚了. **2. n维向量空间的基变换和坐标变换** 从上一节的讨论我们已经知道，向量空间V的基不是唯一的，但当这个基确定后，V中向量在该基下的坐标是唯一确定的，进一步，同一向量在不同基下的坐标一般是不同的. 本节就要讨论向量空间V中两个不同基之间的关系以及同一向量在不同基下的坐标之间的关系. **定义 4.14** 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$是$n$维向量空间$V$的两个基，则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$可由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，设表示式为 $$\boldsymbol{\beta}_j=c_{1j}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{2j}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{rj}\boldsymbol{\alpha}_r,\ j=1,2,\cdots,r \quad (4.11)$$ 或等价于矩阵形式 $$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{P}, \quad (4.12)$$ 其中$\boldsymbol{P}=(c_{ij}),i,j=1,2,\cdots,r$，称$\boldsymbol{P}$为从基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$的过渡矩阵. 称（4.11）或（4.12）为由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$的基变换公式. 过渡矩阵建立了向量空间$V$中的两个基之间的联系，具有下列性质. （1）满足（4.12）的过渡矩阵$\boldsymbol{P}$的第j列是$\boldsymbol{\beta}_j$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$下的坐标. （2）过渡矩阵$\boldsymbol{P}$必是可逆的，并且$\boldsymbol{P}^{-1}$是从基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的过渡矩阵. 又设$V$中向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$与基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$下的坐标分别为	**提出问题**：选取不同基后的坐标关系？ **中测**：过渡矩阵的计算

$(x_1,x_2,\cdots,x_r)^T$ 和 $(y_1,y_2,\cdots,y_r)^T$，即有 $$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$ 又 $$\boldsymbol{\alpha}=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_r\boldsymbol{\beta}_r=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}.$$ 则 $$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$ 由坐标的唯一性，可得 $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$ 称式为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 下的**坐标变换公式**. 【**例** 4.18】 设 R^4 的两个基为 $$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,0)^T,\\\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,0)^T,\\\boldsymbol{e}_3=(0,0,1,0)^T,\\\boldsymbol{e}_4=(0,0,0,1)^T\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,-1,1)^T,\\\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,0)^T,\\\boldsymbol{\alpha}_3=(5,3,2,1)^T,\\\boldsymbol{\alpha}_4=(6,6,1,3)^T.\end{cases}$$ (1) 求由前一个基到后一个基的过渡矩阵； (2) 求向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$ 在后一个基下的坐标； (3) 求在两个基下有相同坐标的向量. **解** (1) 由题意知	**总结：**化抽象为具体，培养学生抽象思维能力。

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$$

从而由前一个基到后一个基的过渡矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$；

(2) 设向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$ 在后一个基下的坐标为 (y_1,y_2,y_3,y_4)，则有

$x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3+x_4\boldsymbol{e}_4=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+y_3\boldsymbol{\alpha}_3+y_4\boldsymbol{\alpha}_4$，

即
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\0&3&1&0\\5&3&2&1\\6&6&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix},$$

故
$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\0&3&1&0\\5&3&2&1\\6&6&1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}12&9&-27&-33\\1&12&-9&-23\\9&0&0&-18\\-7&-3&9&26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix};$$

(3) 由 (2) 知，
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}12&9&-27&-33\\1&12&-9&-23\\9&0&0&-18\\-7&-3&9&26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

解方程组得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ （k 为常数）.

3. 线性空间

与 n 维向量空间类似的，我们可以引入更一般地线性空间。先给出数域的定义。

定义 4.15 复数集合$\mathbb{C}$的子集合F如果满足以下条件（1） $0\in F,1\in F$

(2) 对 F 中任意元素 a,b，都有 $a+b\in F, a-b\in F, ab\in F, \frac{a}{b}\in F(b\neq 0)$，则称 F 是一个数域。 显然 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 都是常见的数域，但是 $\mathbb{Z}$ 不满足 $a,b\in\mathbb{Z}$，但是 $\frac{a}{b}$ 不一定属于 $\mathbb{Z}$，所以不是数域。设 F 是数域，记 F 上所有 n 元向量的集合记为 F^n，类似 F 上所有 $m\times n$ 矩阵的集合记为 $F^{m\times n}$。 定义 4.16 设 F 是数域，V 是 F^n 的一个非空集合，在 V 中定义了两种运算，一种叫加法，满足对任意 $\alpha,\beta\in V$，均有 $\alpha+\beta\in V$；一种叫数乘运算，满足对任意 $\alpha\in V, k\in F$，都有 $k\alpha\in V$，且对这两种运算满足下面 8 条运算规律（1）加法交换律 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$； （2）加法结合律 $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$ （3）V 中存在零元 0，使得对任意 $\alpha\in V, 0+\alpha=\alpha$ （4）V 中每个元素都有负元素，对任意 $\alpha\in V$，存在 V 中元素 β，使得 $\alpha+\beta=0$，β 叫做 α 的负元素； （5）单位数乘不变性 $1\cdot\alpha=\alpha$ （6）分配律 $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$ （7）分配律 $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$ （8）数乘结合律 $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$ 则满足上述所有条件的 V 称为数域 F 上的**线性空间**，加法和数乘称为**线性运算**。 【**例** 4.19】取 $F=\mathbb{R}$ 为实数，$V=\mathbb{R}^n$ 为 n 维向量的全体，由向量的运算知此时 $\mathbb{R}^n$ 就是 n 维实线性空间。 最后介绍 **定理** 4.20 设 V 是数域 F 上的线性空间，则有	 **能力拓展：**从向量空间出发引入更一般的线性空间的定义

（1） V 中零元素 0 唯一；

（2） V 中任意元素 α 的负元素 $-\alpha$ 唯一；

（3） $0\alpha = 0, k0 = 0, (-1)a = -\alpha$；

（4） 若 $k\alpha = 0,$ 则 $k = 0$ 或 $\alpha = 0$ 。

作为练习，请证明。

二、　回顾和小结

小 结：

1. 向量空间，基和维数；

2. 过渡矩阵，基变换和坐标变换；

三、　复习思考与作业

思考题：

1. 比较基与极大无关组的概念的关系。

2. 不同基引起的过度矩阵之间的关系如何？

作业题：

习题 4.4：2、3、4

后测： 拓展性思考题题和课后检测

第（18）次课

<table>
<tr><td>教学章节</td><td>第四章 第 4.5 节</td><td>学时</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>教材
和参考书</td><td colspan="3">1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书）
2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书）
3. David.C.Lay,线性代数及其应用(英文版),电子工业出版社,2010.（教学参考）
4. Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
5. Jim Hefferon, Linear Algebra, available for free online，2014. （教学参考）
6. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考）
7. 刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学目的：掌握向量的内积、向量长的概念，了解正交向量组的概念，能够运用正交化公式将线性无关的向量组等价地化为正交化的单位向量，掌握正交矩阵的定义，穿插用正交矩阵画出五角星的思政案例，介绍国旗的历史知识，培养艰苦朴素的意志，培养学生逻辑推理能力及抽象思维能力；
2.教学重点：正交化公式将线性无关的向量组化为正交向量组的几何解释；
3.教学难点：正交化公式将线性无关的向量组化为正交向量组的几何解释。</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学内容：正交向量；正交矩阵；
2.时间安排：2 学时；
3.教学方法：讲授与讨论相结合；
4.教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc 平台讨论+测试。</td></tr>
<tr><td colspan="4">教学设计：
课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析，培养学生自主学习能力，训练独立思考的素质）：
1. 观看中国大学慕课平台线性代数典型习题讲解中的课程导学，初步了解向量正交的定义和正交化的过程；</td></tr>
</table>

2. 从物理中思考讲斜坐标系变为直角坐标系的过程

3. 了解 MATLAB 软件，学习 MATLAB 正交化的语法。

课中检测，并探讨重点、难点知识点（将启发式、互动式和探究式等多种教学方法适时融入教学过程，提高学生课堂学习的深度参与度，培养逻辑思维能力，思辨能力等）：

1．在案例分析引入向量的内积和夹角的定义之后，雨课堂完成对内积和夹角计算的练习题；

2．多种形式的课堂讨论：

① 启发式提问引起课堂讨论：讨论用向量的方法画出五角星和五星红旗，从而深入理解向量线性运算的几何意义及旋转的使用。

② 教师举例引起课堂讨论：了解正交定义后，用向量组正交单位的性质判断正交矩阵，发散学习思维。

3．翻转课堂：

根据课前布置的任务，翻转课堂，由学生回忆向量线性运算的几何意义。

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况，帮助学生进一步深入理解掌握知识点，培养解决复杂问题的能力，训练学以致用的素质）

1.布置书后作业，北化在线平台提交；

2.在 MOOC 平台讨论区，展开内容讨论，并及时评价：

3.在北化在线平台完成课后测试；

4.在微信群、企业微信群、mooc 平台、线下随时回答解决同学的问题。

<table>
<tr><th>基本内容</th><th>教学反思</th></tr>
<tr><td>

4.5 向量的内积与正交向量组

一、 案例导引：

1. 考虑线性方程组 $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x-y+2z=-2, \\ 3x-y+5z=-3. \end{cases}$ （4.10）

如果将每一个方程用向量表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1 = 1,1,1,1$ ，$\boldsymbol{\alpha}_2 = 1,-1,2,-2$ ，$\boldsymbol{\alpha}_3 = 3,-1,5,-3$.

因为向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的对应分量不成比例，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是线性无关的，又容易看出 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. 反映在方程组上就是：第一、第二两个方程的公共解都是第三个方程的解，所以第 3 个方程是多余的，可以把它

</td><td>

前测：在空间如何刻画方程是多余的？

</td></tr>
</table>

从方程组中删去，保留前两个方程. 这样求解（4.10）只要求解保留方程就行了. 回顾在第三章中，我们借助矩阵的理论已经知道，保留方程的个数与方程组系数矩阵的秩相等. 然而，在一个线性方程组中，究竟哪些方程是多余的，哪些方程可以用其余方程线性表示？为了借助向量的工具更深入地研究这个问题，需要研究向量组的极大无关组等相关理论.

2. 每年国庆节前后，你在北京的街头看到最多的是什么？在奥运会的颁奖仪式上，你最希望看到、听到什么？开启弹幕功能，从中挑选符合本节课目标的词条内容，接着继续提问做为中国人，你知道国旗的标准是什么？你知道怎么用向量的方法画出国旗（涂色除外）？

思政元素：引导学生了解国旗的标准和象征意义

二、 浸入式学习与价值引领

1. 向量的内积

定义 4.15 设$\boldsymbol{\alpha}= a_1,a_2,\cdots a_n{}^T,\boldsymbol{\beta}= b_1,b_2,\cdots,b_n{}^T$是任意两个$n$维向量，称数

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$$

为向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的内积(inner product)，记作$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$.

根据内积的定义，容易证明内积具有下列运算性质：

(1)对称性：$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle$；

(2)线性性：$\langle k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle=k\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle+l\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle$；

(3)非负性：$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle\geq 0$ ，$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle=0$当且仅当$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

这里，向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{R}^n$， $k,l\in\boldsymbol{R}$.

定义 4.16 设有n维向量$\boldsymbol{\alpha}= x_1,x_2,\cdots,x_n{}^T$，称数

$$\sqrt{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

为向量$\boldsymbol{\alpha}$的长度或范数，记为$\|\boldsymbol{\alpha}\|$. 当$\|\boldsymbol{\alpha}\|=1$时，称$\boldsymbol{\alpha}$为单位向量.

容易验证：向量的长度具有以下基本性质：

（1）非负性：$\|\boldsymbol{\alpha}\|\geq 0$，$\|\boldsymbol{\alpha}\|=0$的充要条件是$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$；

（2）齐次性： $\|k\boldsymbol{\alpha}\|=|k|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|$；

（3）三角不等式： $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|\le\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$； **【例 4.19】**证明柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz) 不等式： $$\|\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\|\le\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\rangle.$$ 其中$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$是向量空间$R^n$中任意向量. **【证】** 当$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$时，不等式显然成立（等式）. 当$\boldsymbol{\alpha}\ne\boldsymbol{0}$时，不妨作向量$t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}(t\in R)$。由于实系数二次三项式 $$\|t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2=\langle t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle t^2+2\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle t+\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\rangle\ge 0.$$ 因此 $4\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle^2-4\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\rangle\le 0.$ 于是 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle^2\le\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\rangle$，$\|\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\|\le\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|.$ 不难证明不等式等号成立当且仅当$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$线性相关. **2. 正交向量组** **定义 4.17** 设$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$是n维非零向量，称 $$\theta=\arccos\frac{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|},\quad \theta\in 0,\pi$$ 为n维向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$之间的夹角. 如果$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=0$，称向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$正交（或垂直）. 显然，零向量与任何向量正交. 称一组两两正交的非零向量组为正交向量组. **定理 4.20** 若n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是正交向量组，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关. **【证】** 设有一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}.$$ 上式两边同时与$\boldsymbol{\alpha}_j$作内积，得 $$\langle k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle=k_1\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle+\cdots+k_j\langle\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle+\cdots+k_s\langle\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle=0,$$	 **提出问题**：定义角度的依据是什么?

（4.13）

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是正交向量组，所以

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ \|\boldsymbol{\alpha}_j\|^2>0, & i=j,\end{cases}\quad i,j=1,2,\cdots,s,$$

于是（4.13）式成为

$$k_j\langle \boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle=k_j\|\boldsymbol{\alpha}_j\|^2=0,\quad j=1,2,\cdots,s.$$

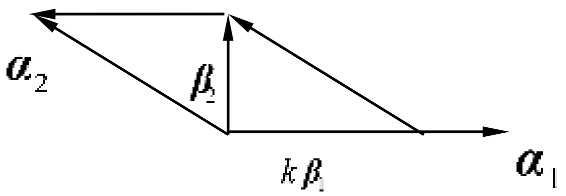
因$\boldsymbol{\alpha}_j\neq\mathbf{0}$，故$\|\boldsymbol{\alpha}_j\|^2\neq 0$，从而必有$k_j=0,\quad j=1,2,\cdots,s$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

定义 4.18 设向量空间V的一个基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$两两正交，则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$为$V$的正交基 .若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是两两正交的单位向量，则称为$V$的标准正交基或规范正交基.

【例 4.20】设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为$\boldsymbol{R}^n$的一个标准正交基。求$\boldsymbol{R}^n$中向量$\boldsymbol{\alpha}$在这个基下的坐标.

问题：空间中描述物体位置的坐标系发生了倾斜，如何恢复呢？或者物理中的斜坐标系如何变为直角坐标系？

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是平面几何向量空间的任一基，则有$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关. 下面从这个基出发，构造一个标准正交基如图所示.



先来构造一个正交基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$. 取$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_1$，使$\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\rangle=0$. 于是，

$$\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\rangle+k\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle=0,\quad k=-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\rangle}{\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle}.$$

代回去,即有$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1$. 由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$不共线,可知$\boldsymbol{\beta}_2\neq\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$构成正交基.

问题：从实际问题出发，如何将向量组正交化?

单位化，即得标准正交基$\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}$.

推广到一般情形，设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是欧氏空间$\boldsymbol{R}^n$的任一基，则可以类似地构造出一个标准正交基$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$，其步骤如下：先构造正交基.

取$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}\boldsymbol{\beta}_2$$

……

$$\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_n-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_{n-1}\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_{n-1}\rangle}\boldsymbol{\beta}_{n-1}.$$

再将它们单位化为：$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$. 其中 $\boldsymbol{\gamma}_j=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_j}{\|\boldsymbol{\beta}_j\|}$，$j=1,2,\cdots,n$. 这就是由向量空间的一般基构造出的标准正交基，这个正交化过程称为**施密特正交化方法**.

【例 4.21】已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$构成$\boldsymbol{R}^3$的基，其中$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. 用施密特正交化方法求$\boldsymbol{R}^3$的一个标准正交基.

【解】 (1) 正交化，得正交基

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

(2) 单位化，得标准正交基

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \gamma_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

3. 正交矩阵

前面给出了标准正交基的概念，下面以 $\boldsymbol{R}^2$ 和 $\boldsymbol{R}^3$ 的标准正交基为列构成的二阶和三阶矩阵，例如

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

可以验证它们都满足

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$$

由此得到正交矩阵的概念. 正交矩阵是一种重要的实方阵，它的行、列向量组都是标准正交向量组.

定义 4.19（正交矩阵）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆实数矩阵，若 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.

显然，正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定是可逆矩阵且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^T$，因而 $(\boldsymbol{A}^T)^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}^T$ 也为正交矩阵.

定理 4.22 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的列（行）向量组是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一组标准正交基.

【证】 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，由于

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\\boldsymbol{\alpha}_2^T\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\cdots\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n\\\boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix},$$

因此 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_i{}^T\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{cases}1,&i=j\\0,&i\neq j\end{cases},(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A}$ 的列

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为$\boldsymbol{R}^n$的一个标准正交基.

由于$\boldsymbol{A}^T$为正交矩阵，所以$\boldsymbol{A}^T$的列向量组为为$\boldsymbol{R}^n$的一个标准正交基，即$\boldsymbol{A}$的行向量组是$\boldsymbol{R}^n$的一组标准正交基.

类似地有，$\boldsymbol{A}$是正交矩阵的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$的行向量组是$\boldsymbol{R}^n$的一个标准正交基.

定理 4.23 正交矩阵满足下列性质：

(1) 正交矩阵的行列式等于± 1；

(2) 正交矩阵的逆矩阵为正交矩阵；

(3) 正交矩阵的积为正交矩阵.

【证】 (1) 设A是正交矩阵，则$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$. 由行列式乘法定理，可得

$$|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}^T||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}|=1,\ |\boldsymbol{A}|=\pm 1.$$

(2) 设$\boldsymbol{A}$是正交矩阵，则$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^T$. 于是$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^T$，$\boldsymbol{A}^{-1}$是正交矩阵.

(3) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是正交矩阵，则$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}$. 于是，

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=(\boldsymbol{AB})^T,$$

$\boldsymbol{AB}$是正交矩阵.

【例 4.22】判断下列矩阵是否为正交矩阵.

（1）$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

解(1)因为第一个行向量不是单位向量,故不是正交矩阵；

（2）因为它的列向量组是相互正交的单位向量组，故是正交矩阵.

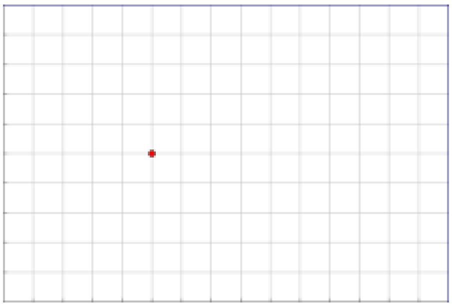
4. 应用案例—画五角星和红旗

1、建立坐标系确定大五角星和小五角星的位置

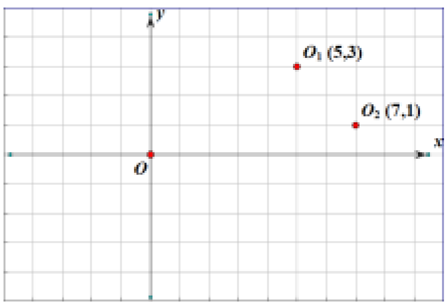
根据国旗的规定，我们需要确定大小五角星的位置，按通常的处理方法将

思政应用案例：复习向量线

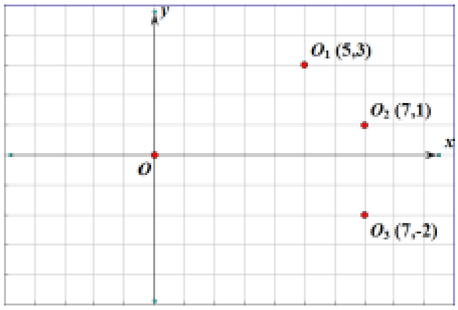
旗面左上角 1/4 的地方，所以我们放大左上角的空白处，按长 15 等分，宽 10 等分，而大五角星的中心点在旗面上五下五，左五右十之处，再以中心点为原点建立直角坐标系，这里也渗透了数学建模解决实际问题的思想，让学生们顿时豁然开朗，原来数学隐藏在这里呢。

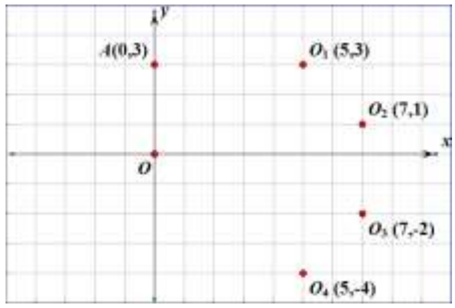




2、根据国旗规定，每个小五角星都有自己特定的位置，那么在我们新建立的直角坐标系下，可以用坐标把它们确定下来，如果连接后就得到向量了。第一点在上二下八、左十右五之处，对应坐标为 $O_1(5,3)$，连接后得向量 $\overrightarrow{OO_1}$；第二点在上四下六、左十二右三之处，对应坐标为 $O_2(7,1)$，连接后得向量 $\overrightarrow{OO_2}$；第三点在上七下三、左十二右三之处，对应坐标为 $O_3(7,-2)$，连接后得向量 $\overrightarrow{OO_3}$；第四点在上九下一、左十右五之处，对应坐标为 $O_4(5,-4)$，连接后得向量 $\overrightarrow{OO_4}$。



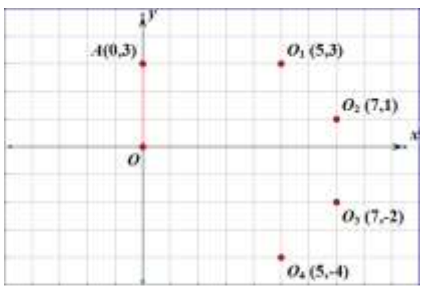
性运算，理解正交矩阵的几何意义－旋转向量

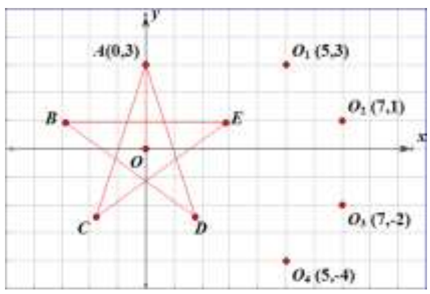


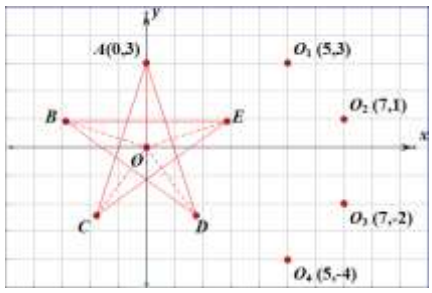


3、除了明显标记出坐标的除了 5 个中心点，按规定，大五角星中心点的正上放 3 个单位处有一个顶点，记为 A，对应坐标为(0,3)，链接后得向量$\overrightarrow{OA}$。此时我们先假设大五角星已经做出来了，假设其他顶点分别为 B,C,D,E 与中心点 O 相连后得依此又得到向量$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}$。

线下课堂互动问题：如何通过大的五角星做出小的五角星呢？







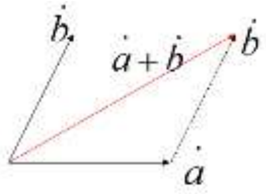
4、引导学生复习向量的线性运算的几何意义

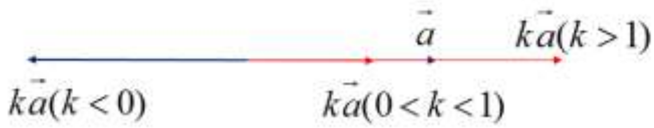
复习向量的两种线性运算，特别是几何意义，希望从中找出画小五角星的方法。

加法：给定向量$\vec{a},\vec{b}$，按平行四边形或者三角形法则，将$\vec{b}$沿$\vec{a}$移动后，首尾链接$\vec{b},\vec{a}$就得到$\vec{a}+\vec{b}$，所以向量的加法就是向量的平移。

数乘：已知向量$\vec{a},k$为实数，则向量$k\vec{a}$大小和方向依赖 k 的正负和大小，

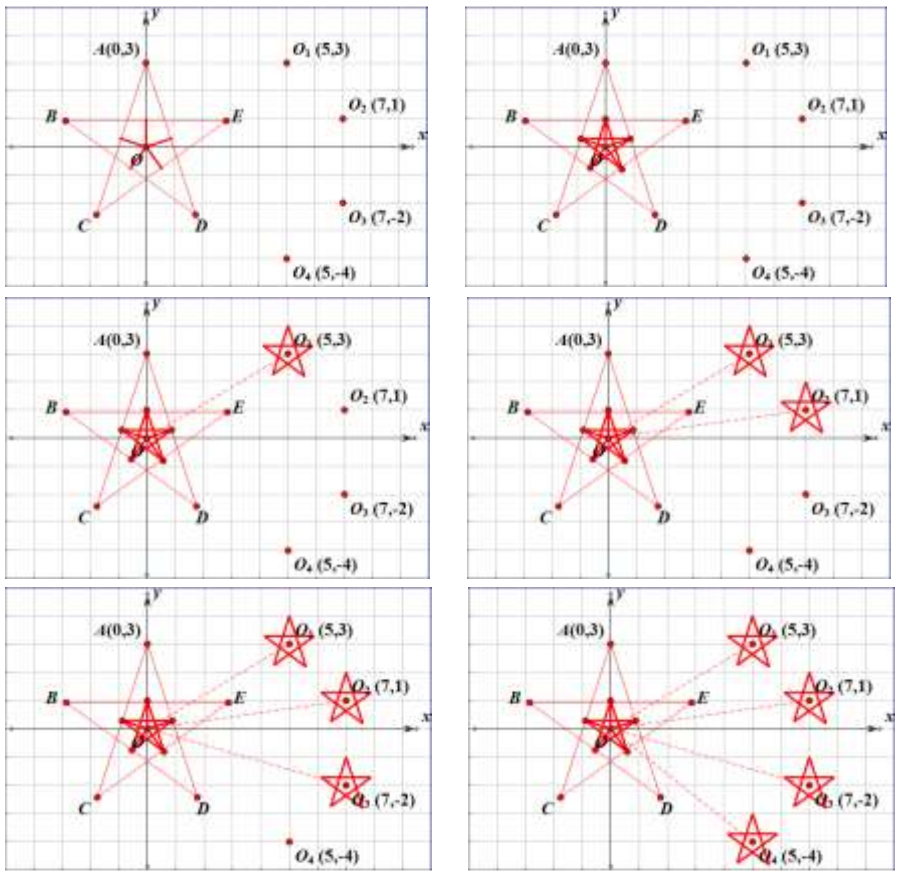
如下图所示，所以向量的数乘就是向量的伸缩。

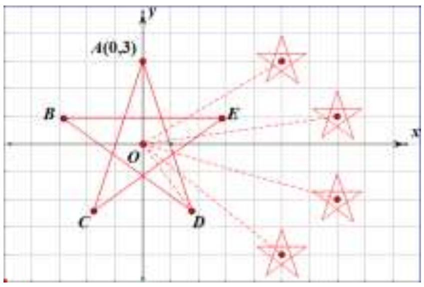




5、解决部分问题

按规定，要求 4 颗小五角星顶点到其中心的距离是 1 个单位，可用向量的数乘将大五角星的坐标放缩 1/3 得到小五角星，然后再用向量的加法分别平移到 4 个小五角星的中心位置。具体为将向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}$ 分别乘以 1/3 就可以确定中心点在原点的小五角的 5 个顶点，相连后得到小五角星。再将小五角星按向量 $\overrightarrow{OO_1},\overrightarrow{OO_2},\overrightarrow{OO_3},\overrightarrow{OO_4}$ 平移，这样就完全在旗面上确定了 5 个五角星了。

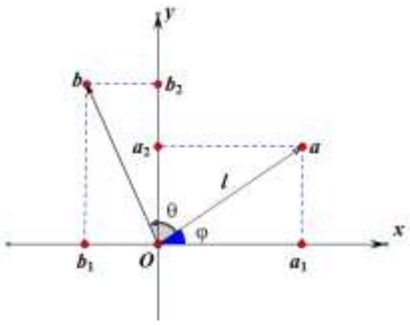




线下课堂互动问题：小五角星的尖没有指到大的中心点，如何改变？为了解决遗留的两个问题，引入向量新的运算---旋转.

6、引入正交矩阵的定义

为了解决遗留的两个问题，我们引入向量旋转的工具，并提炼出其中最核心的内容-正交矩阵的定义，而画五角星所用到的矩阵刚好是一个例子。我们先处理了平面向量逆时针旋转 θ 后向量坐标间的关系，已知向量 $\vec{a}=(a_1,a_2)^T$，绕原点逆时针旋转角度 θ 后得到向量 $\vec{b}=(b_1,b_2)^T$，问 $\vec{b}$ 的坐标是多少？



只要掌握向量的定义就能给出解答，不妨设 $|\vec{a}|=l$，且 $\vec{a}$ 与 x 轴的夹角为 φ，则由坐标的定义知 $a_1=l\cos\varphi, a_2=l\sin\varphi$，旋转后向量 $\vec{b}$ 的夹角为 $\theta+\varphi$，而旋转不改变向量的长度，再按横纵坐标定义计算出 $b_1=l\cos(\theta+\varphi), b_2=l\sin(\theta+\varphi)$，由初等数学中三角函数和差化积公式带入，化简后得到 $\vec{a},\vec{b},\theta$ 之间的关系为

$$\begin{cases} b_1=a_1\cos\theta-a_2\sin\theta \\ b_2=a_1\sin\theta+a_2\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

结合矩阵乘法写成矩阵相乘的形式，这就是平面向量的旋转公式。

特别记 $R_\theta=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，称之为**平面向量旋转矩阵**，其最本质的性质是

$$R_\theta R_\theta^T = R_\theta^T R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2。$$

为此引入本节课的重要内容-正交矩阵。

定义：若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $AA^T = A^T A = E_n$，称矩阵 A 为正交矩阵。

那么显然上面的旋转矩阵就是一类正交矩阵，为了促进学有余力的学生思考，留了**课后思考题**，求出所有 2 阶正交矩阵？

7、完成大五角星的作图

有了旋转工具后，我们来确定大五角星的顶点位置，从而画出大五角星。

已知顶点 A 对应向量 $\overrightarrow{OA} = (0,3)$，显然 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$ 恰好均分一个圆周，则相邻向量之间的夹角为 $\dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$，取旋转矩阵

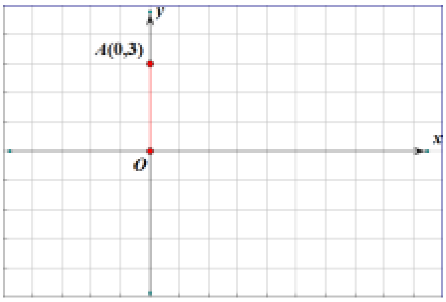
$R = \begin{pmatrix} \cos 72^\circ & -\sin 72^\circ \\ \sin 72^\circ & \cos 72^\circ \end{pmatrix}$，将向量 $\overrightarrow{OA}$ 旋转一次得到向量

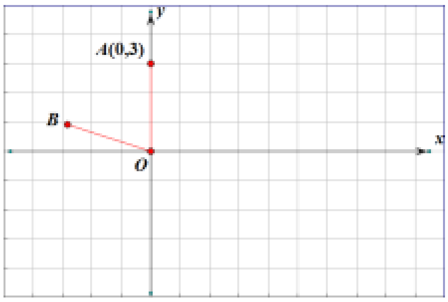
$\overrightarrow{OB} = R\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \cos 72^\circ & -\sin 72^\circ \\ \sin 72^\circ & \cos 72^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.853 \\ 0.927 \end{pmatrix}$，依次旋转得向量

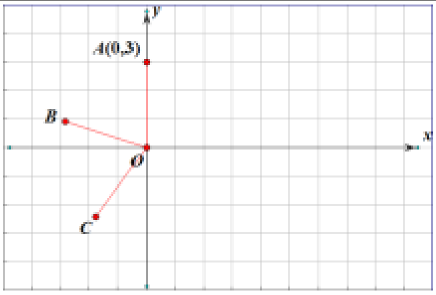
$\overrightarrow{OC} = R^2\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \cos 72^\circ & -\sin 72^\circ \\ \sin 72^\circ & \cos 72^\circ \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.763 \\ -2.427 \end{pmatrix}$，

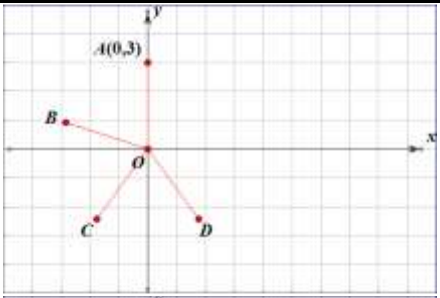
$\overrightarrow{OD} = R^3\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \cos 72^\circ & -\sin 72^\circ \\ \sin 72^\circ & \cos 72^\circ \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.763 \\ -2.427 \end{pmatrix}$，

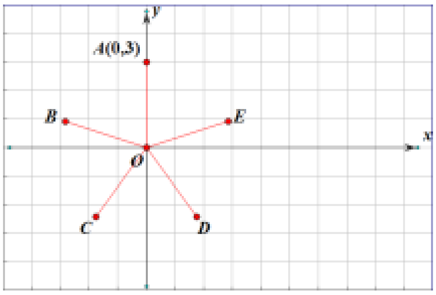
$\overrightarrow{OE} = R^4\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \cos 72^\circ & -\sin 72^\circ \\ \sin 72^\circ & \cos 72^\circ \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.853 \\ 0.927 \end{pmatrix}$，连接后得到大五角星。

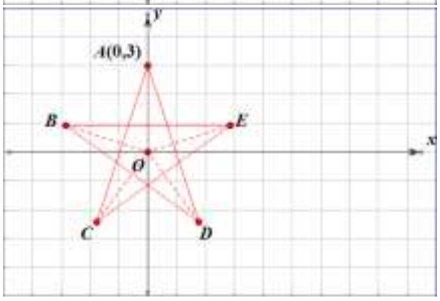






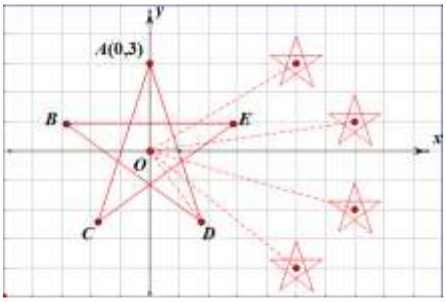


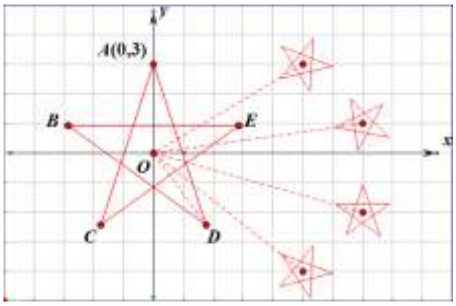




8、调整角度，完成作图

调整小五角星的尖对准大的中心点。因为小五角星是通过平移获得的，其尖没有对准大的中心点，我们还是利用旋转矩阵，通过计算得知，将 4 颗小星分别绕其中心点逆时针旋转$50^{\circ},26^{\circ},2^{\circ},51^{\circ}$，这样就对准了大星的中心点了，**象征围绕着一个中心而团结**，最后再涂色就是一面标准的五星红旗了。





三、 回顾和小结

小 结：

1. 向量组的秩；
2. 正交化一组线性无关的向量组；

四、　复习思考与作业 **思考题：** 1. 定义向量间夹角的理论依据是什么？ 2. 正交矩阵的几何意义是什么？ **作业题：** 第 156 页，习题 4.5： 第 2；4；7；9	**后测：**拓展性思考题题和课后检测

第（19）次课

<table>
<tr><td>教学章节</td><td>第五章 第 5.1、5.2（1）</td><td>学时</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>教材
和参考书</td><td colspan="3">1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书）
2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书）
3. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考）
4. Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra，Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
5. Jim Hefferon，Linear Algebra，available for free online，2014. （教学参考）
6. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考）
7. 刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学目的：了解线性方程组的 3 种形式以及有解的等价描述，理解齐次线性方程组基础解析的概念，掌握用基础解系求解齐次线性方程组的通解的方法，掌握非齐次线性方程组与对应导出组的解之间的联系，能够运用基础解系求解非齐次的通解，能够熟练使用数学软件求解具体的线性方程组，培养学生动手操作的能力，穿插思政案例培养自信、爱国的情怀，培养学生逻辑推理能力及抽象思维能力。
2.教学重点：寻找基础解系，理解齐次与非齐次线性方程组的结构定理和内在联系；
3.教学难点：寻找基础解系，理解齐次与非齐次线性方程组的结构定理和内在联系。</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学内容：基础解系；解的结构定理；
2.时间安排：2 学时；
3.教学方法：讲授与讨论相结合；
4.教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc 平台讨论+测试。</td></tr>
</table>

教学设计：

课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析，培养学生自主学习能力，训练独立思考的素质）：

1. 查看中国大学慕课平台线性代数典型习题讲解中的课程导学，初步了解齐次线性方程组解的结构；
2. 复习之前用自由未知量的方式表达通解的方法，从向量的角度思考解的结构；
3. 了解 MATLAB 软件，学习 MATLAB 解齐次线性方程组的语法。

课中检测，并探讨重点、难点知识点（将启发式、互动式和探究式等多种教学方法适时融入教学过程，提高学生课堂学习的深度参与度，培养逻辑思维能力，思辨能力等）：

多种形式的课堂讨论：

① 启发式提问引起课堂讨论：讨论总结线性方程组的等价表示以及齐次和非齐次有解的等价命题，发散性地启发学生思考问题。

② 教师举例引起课堂讨论：举出之前用自由未知量表达通解的方式，从中分析和基础解系的关系，说明知识点内在联系，由此引发学生结合所学知识延伸学习，改善学生的学习方法。

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况，帮助学生进一步深入理解掌握知识点，培养解决复杂问题的能力，训练学以致用的素质）

1. 布置书后作业，北化在线平台提交；
2. 在 MOOC 平台讨论区，展开内容讨论，并及时评价：
3. 在北化在线平台完成课后测试；
4. 在微信群、企业微信群、mooc 平台、线下随时回答解决同学的问题。

<table>
<tr><th>基本内容</th><th>教学反思</th></tr>
<tr><td>

3.1　线性方程组解的等价命题

3.2　齐次线性方程组的解的结构（1）

一、　浸入式学习与价值引领

1. 线性方程组解的等价命题

（1）一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{5.1}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为未知量，m 为方程的个数.

</td><td>

前测：从不同的角度理解方程组的形式，培养学生发散性思维.

</td></tr>
</table>

（2）矩阵形式

$$AX = b \tag{5.2}$$

其中$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

（3）向量形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b \tag{5.3}$$

其中$\alpha_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ $(j=1,2,\cdots,n)$，$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

2. 线性方程组有解的等价描述

定理5.1 对形如（5.1）或（5.2）或（5.3）的齐次线性方程组（此时$b=0$），下列命题是等价的：

（1）方程组有非零解；

（2）系数矩阵A的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关；

(3)存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$成立；

（4）系数矩阵的秩小于未知量的个数，即$R(A)<n$；

（5）系数矩阵的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的秩小于未知量的个数，即$R\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}<n$.

读者可以类似写出齐次线性方程组只有零解的若干等价性条件.

定理5.2 对形如（5.1）或（5.2）或（5.3）的非齐次线性方程组（此时$b\neq 0$），下列命题是等价的.

（1）方程组有解（唯一或无穷多）；

（2）常数项向量b可由系数矩阵A的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示；

雨课堂互动:弹幕显示,总结.

（3）两个向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$和$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$等价；

（4）系数矩阵和增广矩阵有相同的秩，即$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$；

（5）向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$和向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$有相同的秩，即

$$R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}=R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}\}.$$

类似写出非齐次线性方程组无解的若干等价性条件.

【例 5.1】设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$的任意两个非零矩阵，证明: $\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关.

证 由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$知，$\boldsymbol{B}$的每一列均为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解，而$\boldsymbol{B}$为非零矩阵，所以$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$存在非零解，根据定理 5.1 可知，$\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关. 同理，由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$知，$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{0}$，于是$\boldsymbol{B}^T$的列向量组即$\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关.

3. 齐次线性方程组解的结构

性质 5.1 若向量ξ_1,ξ_2为齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的两个解，则$\xi_1+\xi_2$仍为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解.

性质 5.2 若向量ξ为齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解，$c$为任意实数，则向量$c\xi$仍为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解.

定义 5.2(基础解系) 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$为n元齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的$k$个解向量，如果满足

（1）$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$线性无关；

（2）方程组的任一解向量都可以由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$线性表出.

则称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$为方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

提出问题：比较与极大无关组的关系?

由该定义可知，方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的基础解系可以看做是该方程组的解向量组的极大线性无关组. 下列定理给出基础解系的存在性条件.

定理 5.3 若n元齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的系数矩阵的秩$R(\boldsymbol{A})=r<n$，则该方程组必有基础解系，且基础解系所含解向量的个数为$n-r$.

证 设齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

由于 $R(\boldsymbol{A})=r<n$，$\boldsymbol{A}$ 中必有 r 个列向量线性无关．不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个列向量线性无关，于是若对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换，则 $\boldsymbol{A}$ 可化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1\,r+1} & \cdots & c_{1\,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2\,r+1} & \cdots & c_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r\,r+1} & \cdots & c_{r\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

与之对应的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1+ & & & & c_{1,\,r+1}x_{r+1}+ & c_{1,\,r+2}x_{r+2} & \cdots & +c_{1\,n}x_n & =0, \\ & x_2+ & & & c_{2,\,r+1}x_{r+1}+ & c_{2,\,r+2}x_{r+2} & \cdots & +c_{2\,n}x_n & =0, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & x_r+ & c_{r,\,r+1}x_{r+1}+ & c_{r,\,r+2}x_{r+2} & \cdots & +c_{r\,n}x_n & =0, \end{cases}$$

取 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 为自由未知量，得

$$\begin{cases} x_1=-c_{1,\,r+1}x_{r+1}-c_{1,\,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{1n}x_n, \\ x_2=-c_{2,\,r+1}x_{r+1}-c_{2,\,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{2n}x_n, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=-c_{r,\,r+1}x_{r+1}-c_{r,\,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{rn}x_n. \end{cases}$$

（5.4）

令 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 为下列 $n-r$ 组数：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(5.5)

由方程组（5.4）依次可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{1r+1} \\ -c_{2r+1} \\ \vdots \\ -c_{rr+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c_{1r+2} \\ -c_{2r+2} \\ \vdots \\ -c_{rr+2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \end{pmatrix},$$

从而得到原方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的 $n-r$ 个解

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -c_{1r+1} \\ \vdots \\ -c_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -c_{1r+2} \\ \vdots \\ -c_{2r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r} = \begin{pmatrix} -c_{1n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(5.6)

下面证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 就是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

首先，由于 $n-r$ 维单位向量组（5.5）线性无关，根据第四章定理 4.2 可知，它的延长向量组（5.6），即向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 也线性无关.

其次，证明方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的任一解 $\boldsymbol{\xi}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)^T$ 都可由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表出. 因为方程组（5.4）是原方程组的同解方程组，于是 $\boldsymbol{\xi}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)^T$ 满足（5.4），进一步有

$$\begin{cases} k_1 = -c_{1,\,r+1}k_{r+1} - c_{1,\,r+2}k_{r+2} - \cdots - c_{1n}k_n, \\ k_2 = -c_{2,\,r+1}k_{r+1} - c_{2,\,r+2}k_{r+2} - \cdots - c_{2n}k_n, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_r = -c_{r,\,r+1}k_{r+1} - c_{r,\,r+2}k_{r+2} - \cdots - c_{rn}k_n, \\ k_{r+1} = k_{r+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_n = k_n. \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \\ k_{r+1} \\ k_{r+2} \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = k_{r+1}\begin{pmatrix} -c_{1r+1} \\ \vdots \\ -c_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_{r+2}\begin{pmatrix} -c_{1r+2} \\ \vdots \\ -c_{2r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_n\begin{pmatrix} -c_{1n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = k_{r+1}\xi_1 + k_{r+2}\xi_2 + \cdots + k_n\,\xi_{n-r},$$

所以方程组的任意一个解都可以由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$来线性表出.

这就证明了$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是齐次方程组$\boldsymbol{A}X=\boldsymbol{0}$的基础解系，并且含有$n-r$个解向量.

中测：齐次线性方程组非零解的判定

进一步地，由定理 5.3 立即可得如下结论.

推论 5.1 若n元齐次线性方程组$\boldsymbol{A}X=\boldsymbol{0}$的系数矩阵的秩$R(\boldsymbol{A})=r<n$，则它的任意$n-r$个线性无关的解都是一个基础解系.

二、 回顾和小结

小 结：

1. 基础解系；
2. 齐次与非齐次的通解之间的关系；

三、 复习思考与作业

思考题：

1. 用基础解系表达的方程组的通解与之前用自由未知量表达的通解之间是什么关系？。

后测：拓展性思考题题和课后检测

2. 基础解系是极大无关组吗？

作业题：

第 176-177 页，习题 5.2：4（1）；5 题

第（20）次课

<table>
<tr><td>教学章节</td><td>第五章 第5.2（1）、5.3</td><td>学时</td><td>2学时</td></tr>
<tr><td>教材
和参考书</td><td colspan="3">1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书）
2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书）
3. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考）
4. Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra，Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
5. Jim Hefferon，Linear Algebra，available for free online，2014. （教学参考）
6. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考）
7. 刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学目的：了解线性方程组的3种形式以及有解的等价描述，理解齐次线性方程组基础解析的概念，掌握用基础解系求解齐次线性方程组的通解的方法，掌握非齐次线性方程组与对应导出组的解之间的联系，能够运用基础解系求解非齐次的通解，能够熟练使用数学软件求解具体的线性方程组，培养学生动手操作的能力，穿插思政案例培养自信、爱国的情怀，培养学生逻辑推理能力及抽象思维能力。
2.教学重点：寻找基础解系，理解齐次与非齐次线性方程组的结构定理和内在联系；
3.教学难点：寻找基础解系，理解齐次与非齐次线性方程组的结构定理和内在联系。</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学内容：基础解系；解的结构定理；
2.时间安排：2学时；
3.教学方法：讲授与讨论相结合；
4.教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc平台讨论+测试。</td></tr>
</table>

教学设计：

课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析，培养学生自主学习能力，训练独立思考的素质）：

1. 观看中国大学慕课平台线性代数典型习题讲解中的课程导学，初步了解非齐次和齐次线性方程组解的关系；
2. 比较以前用自由未知量表达通解的结构和这里的关系；
3. 了解 MATLAB 软件，学习 MATLAB 的相关语法语句。

课中检测，并探讨重点、难点知识点（将启发式、互动式和探究式等多种教学方法适时融入教学过程，提高学生课堂学习的深度参与度，培养逻辑思维能力，思辨能力等）：

多种形式的课堂讨论：

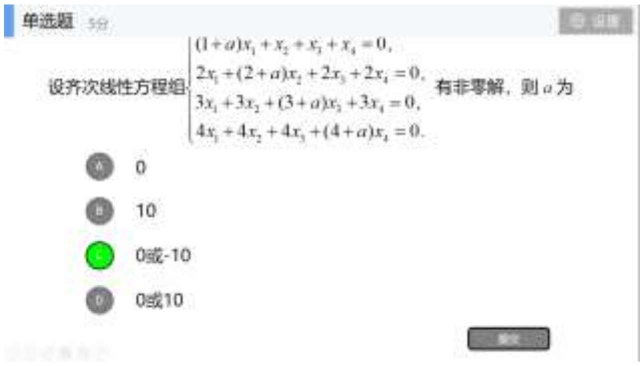
① 启发式提问引起课堂讨论：讨论从齐次过渡到非齐次遇到的具体问题，从而深入理解基础解系的的含义。

② 教师举例引起课堂讨论：举出用自由未知量表达通解的例子，说明从中可以读出基础解系和特解，由此引导学生多角度思考问题，改善学生的学习方法。

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况，帮助学生进一步深入理解掌握知识点，培养解决复杂问题的能力，训练学以致用的素质）

1. 布置书后作业，北化在线平台提交；
2. 在 MOOC 平台讨论区，展开内容讨论，并及时评价：
3. 在北化在线平台完成课后测试；
4. 在微信群、企业微信群、mooc 平台、线下随时回答解决同学的问题。

基本内容	教学反思
5.2 齐次线性方程组的解的结构（2） 5.3 非齐次线性方程组解的结构 **一、　浸入式学习与价值引领** **1. 齐次线性方程组解的结构** 上节课的定理 5.3 和定理 5.4 不仅表明了齐次线性方程组基础解系的存在性条件，实际上还指出了求齐次线性方程组的基础解系的一种方法和通解的表示方法. 下面举例说明有关它们的运用.	**前测：**关联之前自由未知量表达通解的方法，找出内在联系，培养学生发散性思维.



【例 5.4】设齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0.\end{cases}$$

（1）试问 a 为何值时，方程组有非零解？

（2）求出一个基础解系，并用基础解系表示通解.

解（1）由方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a&1&1&1\\2&2+a&2&2\\3&3&3+a&3\\4&4&4&4+a\end{vmatrix}=(10+a)a^3,$$

可知，当 $|\boldsymbol{A}|=(10+a)a^3=0$，即 $a=0$ 或 $a=-10$ 时，方程组有非零解.

（2）分别讨论如下.

① 当 $a=0$ 时，对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\3&3&3&3\\4&4&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，行最简形矩阵对应的方程组为 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$，即 $x_1=-x_2-x_3-x_4$，其中 x_2,x_3,x_4 是自由未知量. （5.7）

分别令自由未知量 x_2,x_3,x_4 为下列 3（注意本题中 $n-R(\boldsymbol{A})=4-1=3$）组数，

令 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，得 $x_1=-1$，进一步得，$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$；

知识点融合：当系数矩阵是方阵时，分类讨论中克莱默法则具有指导意义，体现不同知识点之间的关系

令$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，得 $x_1 = -1$，进一步得，$\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$； 令$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得 $x_1 = -1$，进一步得，$\xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$， 从而 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 为一基础解系，方程组的通解为 $\boldsymbol{\xi} = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + k_3\boldsymbol{\xi}_3$，其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.	
【例 5.3】（重要结论） 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s} = \boldsymbol{0}$，则 $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) \le n$. **解** 设 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$，即 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s)$，则由 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s} = \boldsymbol{0}$ 可得，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{0}$，$j = 1, 2, \cdots, s$，于是 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的 s 个解向量. 又根据定理 5.3 可知，方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系应含有 $n - R(\boldsymbol{A})$ 个解向量，也即方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的解空间中含有的线性无关的解向量个数最多为 $n - R(\boldsymbol{A})$， 于是 $\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\} \le n - R(\boldsymbol{A})$，也即 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{R}\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\} \le n - R(\boldsymbol{A})$，故 $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) \le n$.	**总结：** 重要知识点和结论
2. 非齐次线性方程组解的结构 非齐次线性方程组的 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$（此时 $\boldsymbol{b} \ne \boldsymbol{0}$）解的性质和解的结构与它的导出组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的解之间有密切的关系. 通过直接验证可得 **性质 5.3** 若 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 的解，则 $\frac{1}{2}\ \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2$ 也为方程组的解. **性质 5.4** 若 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2$ 为其导出组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的解.	

性质 5.5 若$\boldsymbol{\eta}^*$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解，$\xi$为其导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解，则$\boldsymbol{\eta}=\xi+\boldsymbol{\eta}^*$也是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解.

由定理 5.4 和性质 5.5，不难得到如下非齐次线性方程组解的结构定理.

定理 5.5 如果非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$有无穷多解，则它的通解可以表示为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+\xi$，其中$\boldsymbol{\eta}^*$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的一个特解，而$\xi$为其导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的通解. 进一步地，当$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系时，非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的通解可表示为

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_{n-r}\xi_{n-r}$，其中$c_1,c_2,\ldots,c_{n-r}$是任意常数.

证 由性质 5.5 可知，$\boldsymbol{\eta}^*+\xi$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解. 设$\boldsymbol{x}$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的任意一个解，则由性质 5.4 可知，$\xi=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\eta}^*$是其导出组的一个解，于是得到$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+\xi$. 当$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系时，由定理 5.4 可知，$\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$，

进而$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$.

【例 5.6】 求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=-1, \\ 3x_1+6x_2+2x_3-x_4=2, \\ -x_1-2x_2+x_3+7x_4=3. \end{cases}$$

的通解，并用导出组的基础解系表示其通解.

解 对增广矩阵$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})$施行初等行变换化为行阶梯形如下，

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 7 & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

由此可知，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=2$，故其导出组的基础解系含有$n-r=4-2=2$个线性无关的解向量，又原方程组的同解方程组为$\begin{cases} x_1+2x_2 \quad -3x_4=4, \\ \qquad\qquad x_3+4x_4=-5, \end{cases}$

即 $\begin{cases} x_1= \ 4-2x_2+3x_4, \\ x_3=-5 \qquad -4x_4, \end{cases}$，其中$x_2,x_4$为自由未知量.

令 $x_2=0, x_4=0$，解得 $x_1=4, x_3=-5$，由此即得方程组的一个特解为

$$\boldsymbol{\eta}=(4,0,-5,0)^T.$$

又对应的齐次线性方程组为 $\begin{cases} x_1=-2x_2 \quad +3x_4, \\ x_3= \qquad\quad -4x_4. \end{cases}$

令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，解得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$，因此 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$；

令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，解得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$，因此 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

从而 ξ_1, ξ_2 为一个基础解系.

非齐次方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中 k_1, k_2 为任意常数.

【例 5.7】 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量， 其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解 由 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 可知，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，而已知 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，所以 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，于是 $R(\boldsymbol{A})=3$. 因而齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的基础解系所含向量的个数 $n-R(\boldsymbol{A})=4-3=1$ 个.

又 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，也即 $1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+(-2)\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_3+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，所以 $(1,-2,1,0)^T$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，进而齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(1,-2,1,0)^T$，其中 k 为任意的常数.

再由 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$ 可得，向量 $(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})^T$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个解.

于是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $k(1,-2,1,0)^T+(1,1,1,1)^T$，其中 k 为任意的常数.

二、　　回顾和小结 **小　结：** 1. 基础解系； 2. 齐次与非齐次的通解之间的关系； **三、　　复习思考与作业** **思考题：** 1.用基础解系表达的方程组的通解与之前用自由未知量表达的通解之间是什么关系？。 2. 基础解系是极大无关组吗？ **作业题：** 第 180-181 页，习题 5.3：5（1）；6 题。	**后测：**拓展性思考题题和课后检测

第（21）次课

<table>
<tr><td>教学章节</td><td>1-5 章阶段性总结，第六章第 6.1 节</td><td>学时</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>教材
和参考书</td><td colspan="3">1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书）
2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书）
3. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考）
4. Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra，Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
5. Jim Hefferon，Linear Algebra, available for free online，2014. （教学参考）
6. 黄廷祝，成孝予， 线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考）
7. 刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学目的：回顾 1-5 章主要知识点；学习 6.1 节特征值与特征向量的概念及计算。
2.教学重点：矩阵的特征值与特征向量的概念与计算。
3.教学难点：概念的深层次含义。</td></tr>
<tr><td colspan="4">4.教学内容：矩阵的特征值与特征向量的概念、性质；相似矩阵的概念；
5.时间安排：2 学时；
6.教学方法：例证法、启发诱导法、讲授法与讨论相结合；
7.教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，MOOC 平台讨论+北化在线测试。</td></tr>
<tr><td colspan="4">教学设计：
课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析）：
1.复习第一到五章内容；
2.整理作业问题：
3.做第一到五章思维导图</td></tr>
</table>

课中检测，并探讨重点、难点知识点

1.第一到五章知识点复习，雨课堂完成典型习题；

2.翻转课堂

学生讲解作业（一题多解）

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况）

1.布置书后作业，北化在线平台提交；

2.在北化在线平台完成课后测试；

3.在微信群、企业微信群、MOOC 平台、线下随时回答解决同学的问题；

基本内容	教学反思
第 1-5 章阶段性总结： **第 1 章内容提要和常见题型** **知识点：** 1、矩阵的定义 2、几种特殊的矩阵 3、矩阵的加法、数乘、乘法、幂与多项式 4、矩阵的转置 5、对称与反对称矩阵 **注意点：** 1、两矩阵可以相乘的条件 2、矩阵的乘法不满足交换律 3、矩阵的乘法不满足消去律 4、AE=EA=A 5、矩阵多项式中常数项的写法 6、矩阵乘积的转置—反序律 **常见题型：** 1、矩阵的运算 2、求矩阵的幂 3、求逆矩阵 4、解矩阵方程 5、有关特殊分块矩阵的题目 6、有关初等变换与初等矩阵的题目 **第 2 章内容提要和常见题型** **知识点：** 1、行列式的定义 2、行列式的性质 3、余子式与代数余子式 4、行列式展开定理 5、方阵的行列式	**前测：** 测试学生的矩阵与向量的乘法 **思政元素** 矩阵对向量的作用可用于图像处

6、伴随矩阵 7、矩阵可逆的充要条件 **注意点：** 1、行列式的拆分性质 2、行列式展开法则的应用 3、常用的特殊行列式 4、方阵行列式的性质 5、伴随矩阵的定义 6、伴随矩阵的万能公式 **常见题型：** 1、低阶行列式的运算 2、一般行列式的计算 3、方阵的行列式 4、伴随矩阵性质的应用	理，在国防安全以及防疫工作中起到了重要作用。
第 3 章内容提要和常见题型 **知识点：** 1、矩阵秩的定义 2、秩的性质 3、秩的求法 4、齐次线性方程组解的判定与求解 5、非齐次线性方程组的解的判定与求解 **注意点：** 1、齐次、非齐次线性方程组解的情况判定等价条件 2、行阶梯型矩阵 3、行简化阶梯型矩阵 4、始终如一用行初等变换 **常见题型：** 1、求秩相关题目 2、方程组求解 3、带参数的方程组解的讨论 **第 4 章内容提要和常见题型** **知识点：** 1、向量的概念和计算 2、线性相关、无关以及表示的定义 3、向量组的等价 4、向量组的秩 5、极大无关组 **注意点：** 1、线性相关、无关以及表示的等价命题 2、两个等价向量的矩阵表示 3、向量组等价与矩阵等价的区别 4、向量组的秩与矩阵的秩的联系	**线上线下结合教学** 雨课堂实现课堂互动教学环节，实时巩固练习所讲概念。

常见题型：
1、向量组线性相关性的判定、证明、反问题。
2、求向量组的秩、极大无关组以及用极大无关组表示其余向量
3、两个向量组的线性表示的判定、证明、反问题
4、求向量在基下的坐标
5、求两组基的过度矩阵

第 5 章内容提要和常见题型
知识点：
1、齐次线性方程组解的性质、基础解系
2、非齐次线性方程组解的性质、结构
注意点：
1、线性方程组的三种等价形式
2、齐次与非齐次线性方程组的解的关系
3、基础解系、基、极大无关组的联系
常见题型：
1、求齐次、非齐次方程组的基础解系
2、已知解的情况，求方程组中的未知参数

第一节　　矩阵的特征值与特征向量

一、　案例导引:

通过**雨课堂**，让学生计算下面的引例，并向学生展示几何意义。

引例 6.1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$.

计算 $\boldsymbol{A\alpha}$，$\boldsymbol{A\beta}$ 和 $\boldsymbol{A\gamma}$，并指出向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 中，哪些向量在 $\boldsymbol{A}$ 的作用下保持向量方向不变.

【解】$\boldsymbol{A\alpha}=\begin{pmatrix}-3\\ 3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=3\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A\beta}=\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A\gamma}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\gamma}$.

从图 6-1 看出，在 $\boldsymbol{A}$ 的作用下，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 分别变成了 $3\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$，方向均保持不变，只是长度分别有所改变和不变；向量 $\boldsymbol{\beta}=(2,1)^T$ 变成了向量 $(0,3)^T$，方向已经改变

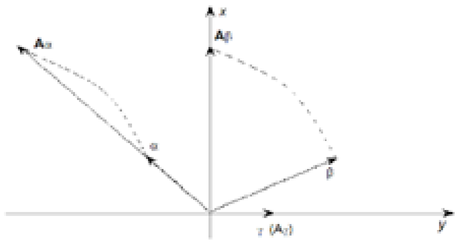


图 6-1

接下来，本节要讨论满足形如 $\boldsymbol{A\alpha}=3\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{A\gamma}=\boldsymbol{\gamma}=1\cdot\boldsymbol{\gamma}$ 的一类矩阵.

思政点：该矩阵作用对应一个线性变换，可用于图像处理、人脸识别、防疫工作等。

二、 浸入式学习与价值引领

1. 特征值与特征向量的定义

定义 6.1 （特征值和特征向量）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，如果存在数 λ 和非零列向量 $\boldsymbol{p}$，使得关系式

$$\boldsymbol{Ap}=\lambda\boldsymbol{p} \qquad (6.1)$$

成立，则称数 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**（elgenvalues），非零列向量 $\boldsymbol{p}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的**特征向量**（elgenvectors）.

这里应当注意，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是方阵．在本章中，如果不特别指出，所讨论的矩阵均为方阵. 显然，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于一个特征值 λ 的特征向量不惟一.

应用举例：

【例 6.1】设 $\boldsymbol{p}=(1,1,-1)^T$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，求 a,b 的值以及与 $\boldsymbol{p}$ 对应的特征值 λ.

【解】由 $\boldsymbol{Ap}=\lambda\boldsymbol{p}$，可得 $\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

于是 $\begin{pmatrix}-1\\5+a-3\\-1+b+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\-\lambda\end{pmatrix}$，解之得 $\begin{cases}a=-3,\\b=0,\\\lambda=-1.\end{cases}$

能力培养
运用概念灵活解决实际问题的能力。。

该题请同学们自己完成，可提问两名学生上台板书，其余在下面演算。 【例 6.2】设λ是方阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_n$的特征值，如何寻求它的所有特征向量？ 【解】因为 $$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X} \Leftrightarrow \left(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}=0,$$ 所以λ是$\boldsymbol{A}$的特征值当且仅当齐次线性方程组$\left(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}=0$有非零解，而此方程组有非零解的充要条件是它的系数行列式等于零，即 $$\left\|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right\|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0.$$ 因此，方程组$\left(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}=0$的非零解就是属于特征值$\lambda$的所有特征向量. 该例题可以让学生思考一下，引领他们给出求特征值与特征向量和齐次线性方程组的关系，进而给出下面的定义。 **2. 特征多项式与特征方程** **定义 6.2 （特征多项式和特征方程）**设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，记 $$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\left\|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right\|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix},$$ 则称$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$为方阵$\boldsymbol{A}$的**特征多项式**（characteristic polynomial），称 $$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\left\|\lambda E-\boldsymbol{A}\right\|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0 \qquad (6.2)$$ 为方阵$\boldsymbol{A}$的**特征方程**（characteristic matrix）. **3. 求特征值与特征向量的方法** 第一步：写出矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\left\|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right\|$. 第二步：求出特征方程$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=0$的全部根，这些根就是$\boldsymbol{A}$的全部特征值.	**知识点内在联系探讨：** 概念给出之后，探究所含的注意点以及深层内涵。

第三步：对每一个特征值 $\lambda_j, j=1,2,\cdots,n$，代入齐次线性方程组 $(\lambda_j \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，求出该齐次线性方程组的非零解 $\boldsymbol{p}$，即为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_j 的全部特征向量.

应用举例：

【例 6.3】求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

【解】矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3),$$

令 $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$.

当 $\lambda_1=1$ 时，求解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的非零解如下：

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，

因此属于特征值 $\lambda_1=1$ 的所有特征向量为 $k_1\boldsymbol{p}_1(k_1\neq 0)$；

当 $\lambda_2=2$ 时，求解齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的非零解如下：

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，

因此属于特征值 $\lambda_2=2$ 的所有特征向量为 $k_2\boldsymbol{p}_2(k_2\neq 0)$；

当 $\lambda_3=3$ 时，求解齐次线性方程组 $(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的非零解如下：

由 $3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}$，

因此属于特征值 $\lambda_3=3$ 的所有特征向量为 $k_3\boldsymbol{p}_3(k_3\neq 0)$.

后测：
除了布置作业与在线测试外，还通过 MOOC 平台发布思考题，引发学生思考与预习。

由本例向学生介绍需注意的点：上三角矩阵的特征值就是它的对角线元素.类似地，对角矩阵和下三角矩阵的特征值也分别是它们对应的对角线上的元素.

4. 代数重数与几何重数的概念

定义 6.3 设λ_0是方阵$\boldsymbol{A}$的特征值.

(1)**(代数重数)** 若λ_0是$\boldsymbol{A}$的特征多项式的n_0重根，则称λ_0是$\boldsymbol{A}$的n_0重特征值，此时称n_0是特征值λ_0的代数重数(algebraic multiplicity).

(2)**(几何重数)** 若$\boldsymbol{A}$有k_0个属于特征值λ_0的特征向量线性无关，且多于k_0个属于特征值λ_0的特征向量都线性相关，则称k_0是特征值λ_0的几何重数（geometric multiplicity).

从概念中向学生详细解释其中的注意点。

【注 1】设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是$n$阶方阵$\boldsymbol{A}$的所有互异特征值，且$\lambda_j$的代数重数为$n_j$，$1\leq j\leq m$，则有$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{n_m}$. n阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式是n次多项式，恰有n个根（重根按重数计算），比较两边的次数，可得$n=n_1+n_2+\cdots+n_m$.

【注 2】设λ_0是n阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值，则$\boldsymbol{p}_0$是属于λ_0的特征向量当且仅当它是齐次线性方程组$(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的非零解. 于是，特征值$\lambda_0$的几何重数$n_j$等于这个方程组解空间的维数，即方程组基础解系所含向量的个数$n-R(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$.

5. 有关特征值和特征向量的性质定理

性质 6.1 设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{A}^T$有相同的特征值.

【证】 因为

$$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\left|(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^T\right|=\left|(\lambda\boldsymbol{E})^T-\boldsymbol{A}^T\right|=\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^T\right|=f_{\boldsymbol{A}^T}(\lambda),$$

即$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{A}^T$有相同的特征多项式，因而具有相同的特征值. ▌

性质 6.2 设λ是$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{p}$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值λ的特征向量，则

（1）λ^m是$\boldsymbol{A}^m$的特征值，对应的特征向量不变,其中m是任意的正整数.

（2）$f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_k\lambda^k$是$f(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_kA^k$的特征值，对应的特征向量不变.

（3）若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值是$\dfrac{1}{\lambda}$，$\boldsymbol{A}^*$的特征值是$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$，对应的特征向量不变.

【证】(1) 根据题意可得

$$\boldsymbol{Ap}=\lambda\boldsymbol{p},$$

上式两边左乘以$\boldsymbol{A}$得，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Ap})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{p})=\lambda(\boldsymbol{Ap})=\lambda(\lambda\boldsymbol{p})=\lambda^2\boldsymbol{p}$，即

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{p}=\lambda^2\boldsymbol{p},$$

上式两边再左乘以$\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{p}=\lambda^3\boldsymbol{p},$$

继续进行上述步骤$m-3$次，得到

$$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{p}=\lambda^m\boldsymbol{p}\text{，其中 } m \text{ 是任意的正整数. } \blacksquare$$

（2）由（1）可知，$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{p}=\lambda^m\boldsymbol{p}$，其中$k$是任意的正整数. 于是

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}&=\left(a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m\right)\boldsymbol{p}\\ &=a_0(\boldsymbol{Ep})+a_1(\boldsymbol{Ap})+\cdots+a_k\left(\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{p}\right)=a_0\boldsymbol{p}+a_1\lambda\boldsymbol{p}+\cdots+a_k\lambda^k\boldsymbol{p}\\ &=\left(a_0+a_1\lambda+\cdots+a_k\lambda^k\right)\boldsymbol{p}=f(\lambda)\boldsymbol{p}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

（3）若$\boldsymbol{A}$可逆，则必有$\lambda\neq0$. 否则，必有$\boldsymbol{Ap}=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$，而特征向量$\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$，于是$|\boldsymbol{A}|=0$，这与$\boldsymbol{A}$可逆矛盾，所以$\lambda\neq0$. 从而有

$$\boldsymbol{Ap}=\lambda\boldsymbol{p}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{Ap})=\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda\boldsymbol{p})=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p},$$

于是

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{p},$$

故$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值是$\dfrac{1}{\lambda}$，对应的特征向量是$\boldsymbol{p}$. 再将$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$代入上式左边，进一

步可得

$$A^* p = \frac{|A|}{\lambda} p,$$

故 A^* 的特征值是 $\frac{|A|}{\lambda}$，对应的特征向量是 p .■

雨课堂发布在线实例，学生线上练习并提交答案。

【例 6.4】设 4 阶可逆矩阵 A 有一个特征值为 3，则矩阵 $9\left(A^{-1}\right)^2 - 3A^{-1} + 2E$ 有一个特征值为________________.

【解】根据性质 6.2 可知， $9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot 1 = 2$ 为所求矩阵的一个特征值，故本题应填 2.

定理 6.1 设 n 阶方阵 $A = \left(a_{ij}\right)$ 的全部特征值（重特征值按重数计算）为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则

（1）$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$；

（2）$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$.

【证】（1）根据题意可得，

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) \quad . \tag{6.3}$$

由行列式的定义可知，

式（6.3）左边的行列式展开式中，只有主对角线元素的乘积项

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn}) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots$$

中含有 λ^{n-1} 的项，其系数为 $-(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$；

式（6.3）右边 $= \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$，

于是通过比较左右两端 λ^{n-1} 的系数，可得

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

（2）在式（6.3）中，令 $\lambda = 0$，得

$$|0-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn}\end{vmatrix}=(0-\lambda_1)(0-\lambda_2)\cdots(0-\lambda_n)$$

于是$(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|-\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|$，从而$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$. ∎

定义 6.4 设n阶方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，称$\boldsymbol{A}$的主对角元素之和$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$为$\boldsymbol{A}$的迹（trace），记为$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$，即$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$.

【例 6.5】设 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式为$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$. 求

（1）$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$；（2）$|2\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A}^*|$.

【解】由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)=0$，可得$\boldsymbol{A}$的特征值为

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2,$$

于是由定理 6.1 可知

（1）$\boldsymbol{A}$的迹$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-1+1+2=2$；

（2）$|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=(-1)\cdot1\cdot2=-2$，再由性质 6.2 可知，$\boldsymbol{A}^*$的三个特征值分别为$2,-2,-1$，进而可知，$|2\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A}^*|$的特征值分别为

$$2+3\cdot2=8,\ 2+3\cdot(-2)=-4,\ 2+3\cdot(-1)=-1,$$

于是$|2\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A}^*|=8\cdot(-4)\cdot(-1)=32$.

推论 6.1 n阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件是它的任一特征值均不为零.

定理 6.2 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是$n$阶方阵$\boldsymbol{A}$的$m$个互异特征值，$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$依次是对应的特征向量，则$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$线性无关.

【证】(1) 设有常数$c_1,c_2,\cdots,c_m$使得

$$c_1\boldsymbol{p}_1+c_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{p}_m=0,$$

则 $$\boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{p}_1+c_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{p}_m)=0,$$

即 $$\lambda_1 c_1 \boldsymbol{p}_1 + \lambda_2 c_2 \boldsymbol{p}_2 + \cdots + \lambda_m c_m \boldsymbol{p}_m = 0.$$

类推之 $$\lambda_1^k c_1 \boldsymbol{p}_1 + \lambda_2^k c_2 \boldsymbol{p}_2 + \cdots + \lambda_m^k c_m \boldsymbol{p}_m = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, m-1.$$

把上列各式合写成矩阵形式，得

$$\left(c_1 \boldsymbol{p}_1 + c_2 \boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_m \boldsymbol{p}_m\right)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}).$$

等号左边第二个矩阵的行列式为范德蒙（Vandermonde）行列式，当 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 各不相同时，该行列式的值不等于零，所以存在逆矩阵，等号两边同时右乘它的逆矩阵，于是

$$\left(c_1 \boldsymbol{p}_1 + c_2 \boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_m \boldsymbol{p}_m\right) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}),$$

即 $$c_j \boldsymbol{p}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \cdots, m,$$

又因为 $\boldsymbol{p}_j$ 为特征向量， $\boldsymbol{p}_j \neq \mathbf{0}$ ，故 $c_j = 0\,(j = 1, 2, \cdots, m)$ ，所以向量组 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 线性无关.█

*定理 6.3 设 λ_j 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n_j 重特征值，s 是 λ_j 的几何重数，则必有 $s \le n_j$.

【例 6.6】设 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1 和 λ_2 的特征值向量， $\boldsymbol{p}_3$ 和 $\boldsymbol{p}_4$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_3 的两个线性无关的特征向量，并且 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 互不相同，证明 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ 线性无关.

【证】设有一组数 k_1, k_2, k_3, k_4，使得

$$k_1 \boldsymbol{p}_1 + k_2 \boldsymbol{p}_2 + k_3 \boldsymbol{p}_3 + k_4 \boldsymbol{p}_4 = \mathbf{0} \qquad (6.6)$$

因为

$$\boldsymbol{A}\left(k_3 \boldsymbol{p}_3 + k_4 \boldsymbol{p}_4\right) = k_3 \lambda_3 \boldsymbol{p}_3 + k_4 \lambda_3 \boldsymbol{p}_4 = \lambda_3\left(k_3 \boldsymbol{p}_3 + k_4 \boldsymbol{p}_4\right),$$

所以 $k_3 \boldsymbol{p}_3 + k_4 \boldsymbol{p}_4$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_3 的特征向量. 又因为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 互不相同，所以向量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, k_3 \boldsymbol{p}_3 + k_4 \boldsymbol{p}_4$ 线性无关，于是（6.6）式中必有 $k_1 = k_2 = 0$，进而再由 $\boldsymbol{p}_3$ 和 $\boldsymbol{p}_4$ 线性无关可知，也必有 $k_3 = k_4 = 0$，因此（6.6）式中所有的系数

都为零，故 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ 线性无关.

由例题 6.6，不难得到如下结论.

***定理 6.4** 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异特征值，如果 $\boldsymbol{p}_{j1}, \boldsymbol{p}_{j2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{jn_j}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_j 的 n_j 个线性无关的特征向量，$j = 1, 2, \cdots, m$，$n_1 + n_2 + \cdots + n_m \le n$，则

$$\boldsymbol{p}_{11}, \boldsymbol{p}_{12}, \cdots, \boldsymbol{p}_{1n_1}, \boldsymbol{p}_{21}, \boldsymbol{p}_{22}, \cdots, \boldsymbol{p}_{2n_2}, \cdots\cdots, \boldsymbol{p}_{m1}, \boldsymbol{p}_{m2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{mn_m}$$

线性无关.

三、 回顾和小结

小 结：

1. 特征值与特征向量的概念；
2. 求特征值与特征向量的运算方法；
3. 特征值与特征向量的性质及定理

四、 复习思考与作业

思考题：通过中国大学生慕课 Mooc 发布在线讨论

1.用方阵的任意特征向量的非零线性组合表示的向量依然是特征向量吗？为什么？

作业题：

北化在线平台测试

Mooc 平台单元测试

第（22）次课

教学章节	第六章第 6.2 节	学时	2 学时
教材 和参考书	8. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书） 9. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书） 10. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考） 11. Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考） 12. Jim Hefferon，*Linear Algebra,* available for free online，2014. （教学参考） 13. 黄廷祝，成孝予， 线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考） 14. 刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）		
1.教学目的：学生在课程结束之后能够理解掌握相似矩阵的定义及其相关性质与定理，并可以判断方阵是否可相似对角化。对于可相似对角化的矩阵，能够写出相似对角变换的过程。 2.教学重点：讲解相似矩阵与相似对角化定义、相似变换的步骤。 3.教学难点：使学生能够利用定义、性质与定理做相似变换的计算或者证明。			
1.教学内容：6.2 相似矩阵； 2.时间安排：2 学时； 3.教学方法：讲授与讨论相结合； 4.教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc 平台讨论+测试。			
教学设计： 课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析）： 1.北化在线平台 6.2 视频学习； 2.预习了解什么是相似矩阵？			

课中检测，并探讨重点、难点知识点 1.通过定义，引导学生找出相似矩阵中的规律； 2.相似矩阵的性质 课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况） 1.布置书后作业，北化在线平台提交； 2.在北化在线平台完成课后测试； 3.在微信群、企业微信群、MOOC 平台、线下随时回答解决同学的问题；

基本内容	教学反思
第二节　　相似矩阵 **一、　回顾与前侧：** 发布雨课堂问答题“上节课上我们学习了两个矩阵之间的关系叫什么？”。学生作答之后，给出答案—“矩阵的相似”。随后，提问学生并解答“相似”与“等价”的关系。 **二、　浸入式学习与价值引领** **1、相似矩阵的概念** **定义 6.5　（相似矩阵）** 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，若存在 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$$ 成立，则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵（similar matrices)，或称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似．$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，常记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$． 概念给出之后，带领学生思考，相似于等价的区别和联系：相似一定等价，等价不一定相似。 **性质6.3．** 等价关系（equivalence relation） （1）反身性：$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$； （2）对称性：若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$； （3）传递性：若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$． 对 $\boldsymbol{A}$ 进行运算称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行相似变换，换言之．相似变换是对方阵进行的一种运算，它把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，而可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为进行这一变换的相似变换矩阵．	**前测：** 测试学生对预习“相似”概念的理解。

例如对矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4\\-1&-1\end{pmatrix}$，取可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}$，对 $\boldsymbol{A}$ 进行相似变换 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，因为 $$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&4\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$ 所以 $\begin{pmatrix}3&4\\-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 显而易见， （1）相似变换具有线性，即 $\boldsymbol{P}^{-1}\left(k_1\boldsymbol{A}_1+k_2\boldsymbol{A}_2\right)\boldsymbol{P}=k_1\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}+k_2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P}$，其中 k_1,k_2 是任意常数； （2）矩阵乘积的相似变换等于每个矩阵相似变换的乘积，即 $\boldsymbol{P}^{-1}\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\right)\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}\right)\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P}\right)$. **2、相似矩阵的定理及应用举例** **定理 6.5** 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 （1）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的秩，即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$； （2）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式和特征值，即 $\lvert\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\rvert=\lvert\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\rvert$； （3）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有完全相同的特征值，即 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值当且仅当它是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，且有相同的代数重数； （4）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的行列式，即 $\lvert\boldsymbol{A}\rvert=\lvert\boldsymbol{B}\rvert$； （5）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的迹，即 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$； （6）$f(\boldsymbol{A})$ 和 $f(\boldsymbol{B})$ 也相似，其中 $f\left(x\right)$ 是一个多项式. 【证】这里仅对（2）和（6）给出证明，其他请读者自证. （2）因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以存在可逆矩阵 P，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，于是	**思政元素** 矩阵的对角化也可用于图像处理，在国防安全以及防疫工作中起到了重要作用。 **线上线下结合教学**

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}||(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})||\boldsymbol{P}|=|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|.$$

（6）因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以存在可逆矩阵 P，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^k&=\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)^k=\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)\cdot\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)\cdots\cdots\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)\\&=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\right)\cdot\boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\right)\cdots\cdots\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\right)\cdot\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}\cdots\cdots\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}\\&=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{P}.\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}f\left(\boldsymbol{B}\right)&=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{B}+a_2\boldsymbol{B}^2+\cdots+a_m\boldsymbol{B}^m\\&=a_0\boldsymbol{E}+a_1\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)+a_2\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)^2+\cdots+a_m\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)^m\\&=a_0\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}+a_1\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)+a_2\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}\right)+\cdots+a_m\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{P}\right)\\&=\boldsymbol{P}^{-1}\left(a_0\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}\left(a_1\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}\left(a_2\boldsymbol{A}^2\right)\boldsymbol{P}+\cdots+\boldsymbol{P}^{-1}\left(a_mA^m\right)\boldsymbol{P}\\&=\boldsymbol{P}^{-1}\left(a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m\right)\boldsymbol{P}\\&=\boldsymbol{P}^{-1}f\left(\boldsymbol{A}\right)P.\end{aligned}$$

∎

应用该定理解决下面的例子，通过雨课堂发布，让学生动手练习。

【例 6．7】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，求 x 和 y 的值.

【解】 因为相似矩阵具有相同的迹和行列式，故

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=2+0+x=2+x=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}=2+y-1=1+y.$$

又 $$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{vmatrix}=-2=|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=-2y,$$

故得 $x=0, y=1$，且知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,1,-1$.

3、矩阵的相似对角化

定义6.6 如果一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，简称 $\boldsymbol{A}$ **可对角化**（diagonalizable）.

那么，任何矩阵可对角化吗？下面的定理回答了这个问题.

定理 6.6 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是它具有 n 个线性无关的特征向量.

雨课堂实现课堂互动教学环节，实时巩固练习所讲概念。

【证】 先证必要性．设 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 相似，则存在一个 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$．于是 $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}. \qquad (6.7)$$ 对 $\boldsymbol{P}$ 按列分块，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$，则可将式（6.7）写成 n 个向量等式 $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_j=\lambda_j\boldsymbol{p}_j,\quad (j=1,2,\cdots,n).$$ 注意到 $\boldsymbol{P}$ 可逆，故上式中的 $\boldsymbol{p}_j$ 均为非零向量，且 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 线性无关；同时，由定义 6.1 可知，这些 $\boldsymbol{p}_j$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\boldsymbol{\lambda}_j$ 的特征向量，其中 $j=1,2,\cdots,n$． 充分性．设 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$，与它们对应的特征值依次为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则有 $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_j=\lambda_j\boldsymbol{p}_j,\quad \boldsymbol{p}_j\neq\boldsymbol{0}\,(j=1,2,\cdots,n).$$ 令矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$，显然，$\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵，且 $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n)=(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{p}_n)$$ $$=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix},$$ 于是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$ 相似．▋	**能力培养** 运用概念灵活解决实际问题的能力。。

推论 6.2 若一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则必存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\dots,\boldsymbol{p}_n)$， 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$， 其中对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的主对角元素 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 由对应于特征值 λ_j 的 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\dots,\boldsymbol{p}_n$ 作列向量构成. **推论 6.3** 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互不相同，则 $\boldsymbol{A}$ 必可对角化. 通过雨课堂发布习题。 【例 6.10】设 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$ 为三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，属于它们的特征向量依次为 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$，令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_2,-2\boldsymbol{p}_3,3\boldsymbol{p}_1)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=(\quad)$. (A) $\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -2 & \\ & & 6\end{pmatrix}$；(B) $\begin{pmatrix}1 & & \\ & -2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$；(C) $\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$；(D) $\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & -1\end{pmatrix}$. 【解】 因矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$ 互不相同，故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 不难看出向量 $\boldsymbol{p}_2,-2\boldsymbol{p}_3,3\boldsymbol{p}_1$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1$ 的特征向量，于是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & \\ & \lambda_3 & \\ & & \lambda_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & -1\end{pmatrix}$. 故本题应选(D). 【注】在由线性无关特征向量构作可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 时，各特征向量的排列次序可任意安置. 只需注意的是：$\boldsymbol{P}$ 的列 $\boldsymbol{p}_j$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的对角元 λ_j 的对应性，如果不计 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\dots,\boldsymbol{p}_n$（或 λ_j）的排列顺序，则 $\boldsymbol{P}$（或 $\boldsymbol{\Lambda}$）惟一. 【例 6.11】设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,1,-2$，对应特征向量依次为	知识点内在联系探讨： 概念给出之后，探

$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. （1）求矩阵 $\boldsymbol{A}$. （2）求 $\boldsymbol{A}^{2015}$. 【解】（1）令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$. 因为 $\lvert\boldsymbol{P}\rvert\neq 0$，所以 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 线性无关，于是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必可对角化，故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$. 又求得 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\\0&1&0\\\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. （2）$\boldsymbol{A}^{2015}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{2015}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2^{2015}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-2^{2014}&0&\frac{1}{2}+2^{2014}\\0&1&0\\\frac{1}{2}+2^{2014}&0&\frac{1}{2}-2^{2014}\end{pmatrix}$. **通过以下例子向学生展示并不是所有的矩阵都可以对角化，并带领学生思考什么样的矩阵可以对角化？** **【例 6.12】**设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 问 $\boldsymbol{A}$ 能否相似对角化？为什么？	究所含的注意点以及深层内涵。 **后测：** 除了布置作业与在线测试外，还通过 MOOC

【解】　因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=1$ 时，解 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$.

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

从而得到属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的所有特征向量为

$$\boldsymbol{p}_1=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=k_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}，\text{其中 } k_1,k_2 \text{ 为不等于零的任意常数.}$$

同理可求得对应于 $\lambda_3=2$ 的所有特征向量为

$$\boldsymbol{p}_3=k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}，\text{其中 } k_3 \text{ 为不等于零的任意常数.}$$

因为 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

4、相似对角化定理

定理 6.7　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是：对于 $\boldsymbol{A}$ 的每个 n_j 重特征值 λ_j，均有 $R(\lambda_j\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-n_j$.

*【证】只需证明 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值对应线性无关的特征向量的最大个数等于该特征值的重数. 设 $\boldsymbol{A}$ 的互异的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$, 重数分别为

平台发布思考题，引发学生思考与预习。

$n_1,n_2,\cdots,n_m$, 则 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$.

必要性 用反证法. 首先根据定理 6.3 可知，n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_j 的线性无关的特征向量最多只有 n_j 个 $j=1,2,\cdots,n$. 假设有一个特征值 λ_j 所对应的线性无关的特征向量的最大个数 l_j 小于 λ_j 的重数 n_j，则 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量个数必小于 n，由定理 6.6 可知，此时 $\boldsymbol{A}$ 不能与对角阵相似，与题设矛盾，故必要性得证.

充分性 对于 $\boldsymbol{A}$ 的每 n_j 重特征值 λ_j，$\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_j 的特征向量中有 n_j 个线性无关的特征向量，于是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就有 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$ 个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化. ▮

5、相似对角化的实例

通过以下习题，向学生板书+ppt 讲解对角化的常见题型。

【例 6.13】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 且有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，求 x 和 y 的值.

【解】 因为 3 阶矩阵有 3 个线性无关的特征向量，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，从而对二重特征值 $\lambda=2$，必有 $R(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-n_j=3-2=1$ 成立. 而

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&x-2&-x-y\\0&0&0\end{pmatrix},$$

于是有 $x-2=0$ 且 $-x-y=0$，故 $x=2,y=-2$ 即为所求.

【例 6.14】若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，试确定常数 a 的值，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

【解】 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -8 & \lambda-2 & -a\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)[(\lambda-2)^2-16]$$

$$=(\lambda-6)^2(\lambda+2),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2.$

由于 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，故对二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=6$，必有 $R(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=3-2=1$．于是由

$$6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得 $a=0$．因此属于 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 的两个线性无关的特征向量可取为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3=-2$ 时，由于

$$-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 0\\ -8 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

于是属于 $\lambda_3=-2$ 的特征向量可取为 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}.$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，并有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}.$

6、相似对角化的实际应用

向学生讲解图像处理中用到的“奇异值分解”与“矩阵对角化”的联系，通过图像处理引发思政元素：常用的人脸识别等在防疫工作与国防安全中的重要作用。使学生明白线代这门课程的实际用处，增强学习兴趣，加深爱国情怀等。

三、 回顾和小结

小 结：

1. 相似矩阵的定义、性质、定理；
2. 矩阵可相似对角化的充要条件；
3. 相似对角化的方法步骤；

四、 复习思考与作业

思考题：通过中国大学生慕课 Mooc 发布在线讨论

1.矩阵相似对角化的充要条件是什么？

2.为什么实对称矩阵总可以相似对角化？其正交相似对角化的步骤是什么？

作业题：

习题 6.**2**：3、6、9、13
通过北化在线发布本次课程的小测。

第（23）次上课

<table>
<tr><td>教学章节</td><td>第六章　第 6.3, 6.4 节</td><td>学时</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>教材和
参考书</td><td colspan="3">1. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书）
2. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书）
3. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考）
4. Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
5. Jim Hefferon, Linear Algebra, available for free online，2014.（教学参考）
6. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考）
刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="4">1. 教学目的：掌握用实对称矩阵的相似对角化，了解特征值与相似对角化的应用举例
2. 教学重点：实对称矩阵的相似对角化过程；
3. 教学难点：通过求特征值与特征向量，求是对称矩阵的相似对角化.</td></tr>
<tr><td colspan="4">1. 教学内容：实对称矩阵的相似对角化；特征值与相似对角化的应用举例
2. 时间安排：2 学时；
3. 教学方法：讲授与讨论相结合；
4. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，MOOC 平台讨论+测试。</td></tr>
<tr><td colspan="4">教学设计：
课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析）：
1.复习对角化的定义、性质；
2.探寻实对称矩阵的行性质。
课中检测，并探讨重点、难点知识点
多种形式的课堂讨论：</td></tr>
</table>

① 启发式提问引起课堂讨论：实对称矩阵相对于一般矩阵，其特征值与特征向量有哪些特点？

② 提问预习结果：如何让实对称矩阵相似于对角阵？

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况）

1.布置书后作业，北化在线平台提交；

2.在北化在线平台完成课后测试；

3.在微信群、企业微信群、MOOC 平台、线下随时回答解决同学的问题；

基本内容	教学反思

第 6．3 节 实对称矩阵的相似对角化

1．实对称矩阵的性质

导言：上一节讨论了一般矩阵化为对角矩阵的问题，那么，对于实对称矩阵，情形如何？任意阶实对称矩阵是否与对角矩阵相似？为此，本节先讨论有关的一些性质.这节的内容可以说是上节的继续和深入。

例 6.2 求下列实矩阵的特征值.

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$；（2）$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$，$a \neq b$.

【解】（1）由 $\left|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix} \lambda-a & b \\ -b & \lambda-a \end{vmatrix}=\left(\lambda^2-2a\lambda+a^2+b^2\right)=0$，

解得 $\lambda_1=a+ib$，$\lambda_2=a-ib$，其中 i 为虚单位，满足 $i^2=-1$.

（2）由 $\left|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\right|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -b \\ -b & \lambda-a \end{vmatrix}=\left(\lambda^2-2a\lambda+a^2-b^2\right)=0$，

解得，$\lambda_1=a+b$，$\lambda_2=a-b$.

以此例带领学生思考：一个实矩阵的特征值有可能不再是实数，但一个实对称矩阵的特征值是否一定是实数呢？引出下面的定理。

定理 6.8 实对称矩阵的特征值均为实数，相应的特征向量为实向量.

【证】 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，λ 是它的任一特征值，$\boldsymbol{p}$ 是对应的特征向量，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$，两边取共轭，得 $\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{p}}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{p}}$. 再取转置，因为

$\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，所以 $$\bar{\lambda}\overline{\boldsymbol{p}}^T=\overline{\boldsymbol{p}}^T\overline{\boldsymbol{A}}^T=\overline{\boldsymbol{p}}^T\boldsymbol{A},$$ （6.8） 用 $\boldsymbol{p}$ 右乘式（6.8）两端得 $$\bar{\lambda}\overline{\boldsymbol{p}}^T\boldsymbol{p}=\overline{\boldsymbol{p}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\overline{\boldsymbol{p}}^T\boldsymbol{p},$$ 因此 $$\left(\lambda-\bar{\lambda}\right)\overline{\boldsymbol{p}}^T\boldsymbol{p}=0.$$ 但 $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\overline{\boldsymbol{p}}^T\boldsymbol{p}\neq 0$，于是 $\lambda=\bar{\lambda}$，这就是说 λ 是实数. 又因为，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量是线性方程组 $\left(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，而方程组系数都是实数时，它的解也都是实数，所以特征向量也都是实的. ■ **定理 6.9** 实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量必正交. 【证】 设 λ_1, λ_2 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ 是对应的特征向量，则 $$\lambda_1\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1,\ \lambda_2\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2,\ \lambda_1\neq\lambda_2.$$ 于是 $$\lambda_1\left(\boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{p}_2\right)=\left(\lambda_1\boldsymbol{p}_1\right)^T\boldsymbol{p}_2=\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1\right)^T\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{p}_2$$ $$=\boldsymbol{p}_1^T\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2\right)=\boldsymbol{p}_1^T\left(\lambda_2\boldsymbol{p}_2\right)=\lambda_2\left(\boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{p}_2\right),$$ 从而 $$\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{0}.$$ 因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$，故 $\boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{0}$. ■ 应用以上定理给出下面的例子，让学生练习。 **【例 6.15】**设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=-2, \lambda_2=\lambda_3=1$，对应于特征值 $\lambda_1=-2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T$.	**能力培养** 培养学生的计算能力。

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$； （2）将特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 化为标准正交的向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$； （3）问 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 是否仍然是所对应的特征值 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量？ 【解】（1）设 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^T$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，且 $\lambda_1=-2\neq 1=\lambda_2=\lambda_3$，所以根据定理 6.9 可得，$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 必正交，即 $\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}=0$， 也即 $$x_1+x_2+x_3=0.$$ 分别令 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，可得 $x_1=-1$ 和 -1. 取 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的 2 个线性无关的特征向量. （2）将 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T$ 单位化得，$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\Vert\boldsymbol{\alpha}_1\Vert}\boldsymbol{\alpha}_1=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)^T$， 先将 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交化，取 $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{\boldsymbol{\beta}_2{}^T\boldsymbol{\alpha}_3}{\Vert\boldsymbol{\beta}_2\Vert}\boldsymbol{\beta}_2=\left(-\frac12,-\frac12,1\right)^T$， 再单位化，$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\Vert\boldsymbol{\beta}_2\Vert}\boldsymbol{\beta}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0\right)^T$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\Vert\boldsymbol{\beta}_3\Vert}\boldsymbol{\beta}_3=\left(-\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6}\right)^T$， 于是得到标准正交的向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)^T$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0\right)^T$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\left(-\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6}\right)^T$. （3）因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{A}\frac{1}{\Vert\boldsymbol{\alpha}_1\Vert}\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{\Vert\boldsymbol{\alpha}_1\Vert}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{\Vert\boldsymbol{\alpha}_1\Vert}\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\frac{1}{\Vert\boldsymbol{\alpha}_1\Vert}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\gamma}_1$， $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{A}\frac{1}{\Vert\boldsymbol{\beta}_2\Vert}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\Vert\boldsymbol{\alpha}_2\Vert}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{\Vert\boldsymbol{\alpha}_2\Vert}\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\gamma}_2$，	**前测：请同学们试着写出实对称矩阵的特点，雨课堂回答。培养学生思维能力。**

$$A\gamma_3 = A\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3 = \frac{1}{\|\beta_3\|}A\beta_3 = \frac{1}{\|\beta_3\|}A\left(\alpha_3 - \frac{\beta_2^T\alpha_3}{\|\beta_2\|}\beta_2\right) = \frac{1}{\|\beta_3\|}\left(A\alpha_3 - \frac{\beta_2^T\alpha_3}{\|\beta_2\|}A\beta_2\right)$$

$$= \frac{1}{\|\beta_3\|}\left(\lambda_2\alpha_3 - \frac{\beta_2^T\alpha_3}{\|\beta_2\|}\lambda_2\beta_2\right) = \frac{1}{\|\beta_3\|}\lambda_2\left(\alpha_3 - \frac{\beta_2^T\alpha_3}{\|\beta_2\|}\beta_2\right) = \frac{1}{\|\beta_3\|}\lambda_2\beta_3 = \lambda_2\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3 = \lambda_2\gamma_3,$$

所以$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$仍然是所对应的特征值$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$的特征向量.

定理 6.10 矩阵A的同一个特征值的若干个特征向量经过正交化后仍然是那个特征值的特征向量；A的一个特征向量经过单位化后仍然是同一个特征值的特征向量.

定理 6.11 设A为n阶实对称矩阵，λ是A的任一k重特征值，则$R(\lambda E-A)=n-k$，即对应于特征值λ恰有k个线性无关的特征向量.

2．实对称矩阵的对角化

定理 6.12 任意n阶实对称矩阵A必可对角化，且能与对角矩阵正交相似，即存在正交矩阵Q，使得

$$Q^TAQ = Q^{-1}AQ = \Lambda$$

其中Λ是以A的n个特征值为对角元素的对角矩阵.

【证】 设n阶矩阵A的互不相同的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，它们的重数依次是$k_1,k_2,\cdots,k_m$，并且$k_1+k_2+\cdots+k_m=n$. 由定理 6.11 知，对应于某个特征值$\lambda_j\left(i=1,2,\cdots,m\right)$恰有$k_j$个线性无关的实特征向量，利用施密特正交化方法把它们正交化并单位化，即可得到k_j个单位正交的特征向量. 对所有特征值$\lambda_j\left(i=1,2,\cdots,m\right)$，这样的特征向量共可有$n$个.

又由定理 6.9 知对应于不同特征值的特征向量正交，故这n个单位特征向量两两正交，并且是线性无关的. 以它们为列向量构成的矩阵Q是正交矩阵，并且使得矩阵A化为对角矩阵，即$Q^TAQ=\Lambda$，其中Λ的对角元素含有k_1个λ_1，k_2

个λ_2，…，k_m个λ_m，恰是$\boldsymbol{A}$的n个特征值.▉

由该定理给出实对称矩阵的正交相似对角化的实例。

【例 6.16】设n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_j \ge 0\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，证明存在特征值为非负的实对称矩阵$\boldsymbol{B}$，使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

【证】因为$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵，所以必存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right),$$

于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right)\boldsymbol{Q}^T$

$$=\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\right)\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\right)\boldsymbol{Q}^T$$

$$=\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\right)\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\right)\boldsymbol{Q}^T$$

$$=\left(\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\right)\boldsymbol{Q}^T\right)^2,$$

令$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\right)\boldsymbol{Q}^T$，则显然$\boldsymbol{B}$是对称矩阵，特征值为$\sqrt{\lambda_j}\ge 0\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，并且满足$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

【例 6.17】设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$，正交矩阵$\boldsymbol{Q}$使得$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$为对角矩阵，若$\boldsymbol{Q}$的第一列为$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，求$a,\boldsymbol{Q}$.

【解】因为正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$为对角矩阵，所以正交矩阵$\boldsymbol{Q}$的第一列$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$是实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量，设对应的特征值为$\lambda_1$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,$$

课堂讨论同学们小组讨论，实对称矩阵为什么都可对角化吗？慕课平台回答讨论结果。

即 $$\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{cases}\lambda_1=2,\\2\lambda_1=5+a,\\\lambda_1=4+2a.\end{cases}$$

因此 $$\begin{cases}\lambda_1=2,\\a=-1.\end{cases}$$

设 $\boldsymbol{A}$ 的其它两个特征值为 λ_2,λ_3，则由

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33},\\\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|\boldsymbol{A}|.\end{cases}$$

可得 $$\begin{cases}2+\lambda_2+\lambda_3=0+3+0=3,\\2\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{vmatrix}=-40.\end{cases}$$

解之得 $\lambda_2=-4,\lambda_3=5$.

当 $\lambda_2=-4$ 时，$-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4&1&-4\\1&-7&1\\-4&1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-7&1\\-4&1&-4\\-4&1&-4\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&-7&1\\0&-27&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3=5$ 时，$5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\5&1&-4\\-4&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-9&-9\\0&9&9\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$

将$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$分别单位化，得 $\boldsymbol{\beta}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$

故所求的正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

【例 6.18】设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^T$是线性方程组$\boldsymbol{AX}=0$的两个解.

(1) 求$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量；

(2) 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$和对角矩阵$\boldsymbol{\varLambda}$，使得$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\varLambda}$.

(3) 求$\boldsymbol{A}$及$\left(\boldsymbol{A}-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)^6$，其中$\boldsymbol{E}$为 3 阶单位阵.

【解】(1) 因为矩阵$\boldsymbol{A}$的各行元素之和均为 3，所以

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

则由特征值和特征向量的定义可知，$\lambda=3$是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$是对应的特征向量. 对应$\lambda=3$的全部特征向量为$k\boldsymbol{\alpha}$，其中$k$为不为零的常数.

又由题设知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=0,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=0$，即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2$，并且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，所以$\lambda=0$是矩阵$A$的二重特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是其对应的特征向量，对应$\lambda=0$的全部特征向量为$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，其中$k_1,k_2$为不全为零的常数.

（2） 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交，所以只需将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交.

取 $$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\dfrac{-3}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\0\\\dfrac{1}{2}\end{pmatrix},\end{cases}$$

再将 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\\dfrac{2}{\sqrt{6}}\\\dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^T$. 进一步，由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵必可相似对角化，得

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}.$$

（3）由 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$，可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^T$. 于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^T=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}&-\dfrac{1}{\sqrt{6}}&-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{2}{\sqrt{6}}&0\\\dfrac{1}{\sqrt{3}}&-\dfrac{1}{\sqrt{6}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{6}}&\dfrac{2}{\sqrt{6}}&-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&0&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

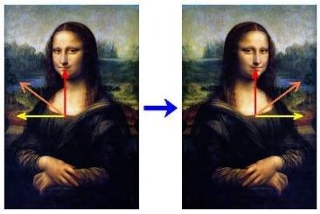
而

$$\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^T-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{\Lambda}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\dfrac{3}{2}&&\\&-\dfrac{3}{2}&\\&&-\dfrac{3}{2}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^T=\frac{3}{2}\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^T,$$

所以

$$\left(\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)^{6}$$

$$\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\left(\frac{3}{2}\right)^{6} & & \\ & \left(\frac{3}{2}\right)^{6} & \\ & & \left(\frac{3}{2}\right)^{6}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{T}=\left(\frac{3}{2}\right)^{6}\boldsymbol{QEQ}^{T}=\left(\frac{3}{2}\right)^{6}\boldsymbol{E}$$



6.4 矩阵特征值和相似对角化应用及其计算软件举例

矩阵特征值、特征向量和相似对角化的应用非常广泛，本节只给出如下例子.

【例 6.19】(特征值和特征向量的几何意义)对于一个给定的矩阵 $\boldsymbol{A}$（在线性代数中常被看做是一种特殊的线性变换），它的特征向量 $\boldsymbol{x}$ 经过它作用之后，得到的新向量 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ 仍然与原来的 $\boldsymbol{x}$ 保持在同一条直线上，但其长度也许会改变.实际上，特征值是一个特征向量的长度在该矩阵作用下缩放的比例.如果特征值为正，则表示 $\boldsymbol{x}$ 在经过该矩阵作用后方向也不变；如果特征值为负，说明方向会反转；如果特征值为 0，则是表示缩回零点.如果特征值的模大于 1，特征向量的长度将被拉伸，而如果特征值的模小于 1，特征向量的长度就将被压缩.如果特征值小于 0，特征向量将会被翻转. 但无论怎样，仍在同一条直线上.

如图 6-2 是《蒙娜丽莎》以及其左右翻转的图像，

当蒙娜丽莎的图像左右翻转时，中间垂直的红色向量方向保持不变.而水平方向上黄色的向量的方向完全反转，因此它们都是左右翻转变换的特征向量.红色向量长度不变，其特征值为 1.黄色向量长度也不变但方向变了，其特征值为-1.橙色向量在翻转后和原来的向量不 在同一条直线上，因此不是特征向量.

图 6-2

【例 6.21】(人口流动问题）设某国人口流动状态的统计规律是每年有十分

之一的城市人口流向农村，十分之二的农村人口流向城市．假定人口总数不变，那么经过多少年后，全国人口将会集中在城市？

【解】 最初城市和农村人口分别为 x_0, y_0，第 m 年城市和农村人口分别为 x_m, y_m，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{m-1} \\ y_{m-1} \end{pmatrix},$$

由此推得

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} x_{m-1} \\ y_{m-1} \end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 0.9 & -0.2 \\ -0.1 & \lambda - 0.8 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 0.7)$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.7$．它们对应的特征向量分别 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$，因而有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，有

$$\boldsymbol{A}^m = \left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\right)^m = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^m\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^m & 0 \\ 0 & 0.7^m \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0.7^m & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0.7^m \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0.7^m & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0.7^m \end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = A^m \begin{pmatrix} x_{m-1} \\ y_{m-1} \end{pmatrix} = (x_0 + y_0)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + (x_0 - 2y_0)0.7^m \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

当 $m\to\infty$ 时，$0.7^m\to 0$，故

$$\begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \end{pmatrix}=(x_0+y_0)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

即当 $m\to\infty$ 时，城市与农村人口为 2:1，趋于稳定得分布状态.

【注】许多实际问题常归结为矩阵的对角化，实则也是求方阵的高次幂问题，比如本例的人口流动问题，类似地还有遗传问题、从业问题等等．事实上，当 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化时，计算其高次幂 $\boldsymbol{A}^k$ 的方法为：

$$\boldsymbol{A}^k=\left(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\right)\cdots\left(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\right)=\boldsymbol{P\Lambda}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{\Lambda}\cdots\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{\Lambda P}^{-1}=\boldsymbol{P\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1},$$

而对于对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，有 $\boldsymbol{\Lambda}^k=\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)$，故

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)\boldsymbol{P}^{-1}.$$

【例 6.22】 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -20 & -19 \\ -2 & 16 & -9 & 11 \\ -8 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & -8 & -4 & -7 \end{pmatrix}$，利用 MATLAB 求其特征值.

【解】

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

方法一

```
A=[2,-2,-20,-19;-2,16,-9,11;-8,4,-6,1;0,-8,-4,-7];     % 生成矩阵 A
syms k                                                 % 定义符号变量 k
B=A-k*eye(length(A));                                  % 构造矩阵 B=(A-kE)
D=det(B);                                              % 计算行列式 |A-kE|
lamda1=solve(D)                                        % 求|A-kE|=0 的符号形式解
lamda1 =                                               %运行结果如下：
          [12]
          [          1/3                  1            ]
          [- 1/3 %1        - 385/3 ----- - 7/3]
          [                               1/3          ]
          [                             %1               ]
          [          1/3                  1
          [1/6 %1        + 385/6 ----- - 7/3
```

方法二

```
A=[2,-2,-20,-19;-2,16,-9,11;-8,4,-6,1;0,-8,-4,-7];      % 生成矩阵 A
P=poly(A);                                               % 计算矩阵 A 的多项式，向量 p 的
                                                         % 元素为该多项式系数
Lamda2=roots(P)                                          % 求该多项式的零点，即特征值
运行结果如下：
 Lamda2 =
 -17.3347
   12.0000
    5.1673 + 6.3598i
    5.1673 - 6.3598i
```

方法三

```
A=[2,-2,-20,-19;-2,16,-9,11;-8,4,-6,1;0,-8,-4,-7];      % 生成矩阵 A
Lamda3=eig(A)                                            % 直接求矩阵 A 的特征值
运行结果如下：
 Lamda3 =
 -17.3347
    5.1673 + 6.3598i
    5.1673 - 6.3598i
   12.0000
```

【例 6.23】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，利用 MATLAB 工具

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

（2）判断 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化？若能，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵.

【解】在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容：

```
A=[1 -1 -1 -1;-1 1 -1 -1;-1 -1 1 -1;-1 -1 -1 1];        % 生成矩阵 A
[V,D]=eig(A)                                              % 直接求矩阵 A 的特征值、特征向量
运行结果如下：
V =
      0.5000     -0.2113     -0.2887      0.7887
      0.5000      0.7887     -0.2887     -0.2113
      0.5000     -0.5774     -0.2887     -0.5774
      0.5000           0      0.8660           0
D =

   -2.0000           0           0           0
         0      2.0000           0           0
         0           0      2.0000           0
         0           0           0      2.0000
```

r=rank(2*eye(4)-A)　% 带入三重根 $\lambda=2$ ，求 $(\lambda E-A)p=0$ 的系数矩阵的秩

r =

1　　% $n-r=3$ 说明 $\lambda=2$ 时，有三个线性无关的特征向量

　　% A 有 4 个线性无关的特征向量，故 A 与对角阵相似

inv(V)*A*V　　% V 即为可逆矩阵 P，D 即为对角阵，验证 $p^{-1}Ap=D$

```
ans =
   -2.0000           0     -0.0000     -0.0000
   -0.0000      2.0000      0.0000      0.0000
    0.0000      0.0000      2.0000      0.0000
   -0.0000     -0.0000      0.0000      2.0000
```

一、 回顾和小结

1. 实对称矩阵的性质；
2. 实对称矩阵的相似对角化；
3. 特征值与对角化应用

二、 复习思考与作业

思考题：在北化在线平台提交。

1. .已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，利用 MATLAB 求其特征值和特征向量，并判定它是否能对角化.

作业题：

北化在线作业；

在线平台测试。

第（24）次授课

<table>
<tr><td>教学章节</td><td>第七章第 7.1、7.2 节</td><td>学时</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>教材
和参考书</td><td colspan="3">15. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书）
16. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书）
17. David.C.Lay,线性代数及其应用(英文版),电子工业出版社,2010.（教学参考）
18. Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra，Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
19. Jim Hefferon，Linear Algebra, available for free online，2014. （教学参考）
20. 黄廷祝，成孝予， 线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考）
21. 刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学目的：学生在课程结束之后能够写出二次型的矩阵形式，掌握合同概念；能够利用“正交变换法”、“配方法”。
2.教学重点：讲解二次型的矩阵表达形式、矩阵合同的概念、前两种化二次型为标准形的方法。
3.教学难点：使学生能够区别合同、等价、相似概念，并利用两种方法化标准形为二次型。</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.教学内容：7.1 二次型与对称矩阵； 7.2 化二次型为标准形
2.时间安排：2 学时；
3.教学方法：讲授与讨论相结合；
4.教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc 平台讨论+测试。</td></tr>
</table>

教学设计：

课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析）：

1. 二次型与对称矩阵以及标准形的定义；

课中检测，并探讨重点、难点知识点

多种形式的课堂讨论：

① 启发式提问引起课堂讨论：什么是二次型、二次型与高中所学的圆锥曲线的区别与联系？

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况）

1.布置书后作业，北化在线平台提交；

2.在北化在线平台完成课后测试；

3.在微信群、企业微信群、MOOC 平台、线下随时回答解决同学的问题；

基本内容	教学反思

第一节 二次型与对称矩阵

一、 前测+案例导引：

前测：发布雨课堂问答题“你知道几类平面曲线、曲面，如椭圆、球面？”接着，给出下面引例。

引例7.1 在平面解析几何中，为便于识别曲线的类型、研究曲线的几何性质，考虑将

$$ax^2+2bxy+cy^2=1 \text{（二次曲线）} \quad (7.1)$$

通过选择适当的角度θ,坐标旋转变换

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

化简为 $a'x'^2+c'y'^2=1$（标准形）.

在空间解析几何中，也有同样的问题，例如

$$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz=1 \text{（二次曲面）} \quad (7.2)$$

选择适当的坐标变换

前测：测试学生对二次曲线的理解与认识。

化简为 $a'x'^2+b'y'^2+c'z'^2=1$（标准形） **二、　浸入式学习与价值引领** 1.　二次型的定义与表达方式 **定义 7.1（二次型）** 含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数 $$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n\\+a_{33}x_3^2+\cdots+2a_{3n}x_3x_n\\+\cdots\cdots\\+a_{nn}x_n^2\end{aligned}\qquad(7.3)$$ 称为 n 元二次型，简称为**二次型（quadratic form）**，也常简记为 f . 这里注意到在（7.3）式的右端，$x_ix_j\left(i<j\right)$ 的系数写成 $2a_{ij}$，显然，二次型可写为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}x_ix_j$　　（7.4） 如果约定 $a_{ij}=a_{ji}\left(i\le j\right)$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$，于是（7.3）式可以写成 $$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\qquad(7.5)\\&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\qquad(7.6).\end{aligned}$$ 于是（7.4）--（7.6）式给出了二次型的和号表示方法（sum representation of quadratic form）. 又在约定 $a_{ij}=a_{ji}\left(i\le j\right)$ 下，（7.3）式也可以写成 $$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\right)$$	**思政元素** “三种化标准形的方法”彰显了数学的对称美、简洁美、巧妙性。

$$+x_2\left(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\right)$$ $$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$ $$+x_n\left(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\right)$$ $$=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ $$=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\text{，}\qquad（7.7）$$ 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$，并称 $\boldsymbol{A}$ 为二次型 f 的矩阵(matrix of quadratic form)．（7.7）式给出了二次型的矩阵形式的表示方法(matrix representation of quadratic form)．显然，二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有两个特点： （1）$\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$； （2）$\boldsymbol{A}$ 的主对角元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 为二次型中平方项 $x_1^2,x_2^2,\cdots,x_n^2$ 的系数，非对角元素 $a_{ij}=a_{ji}$ 为二次型中交叉项 x_ix_j 的系数的一半，$i\neq j$． 因此二次型与它的的矩阵是相互唯一确定的，这表明在选定变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 下，二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 完全由对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 决定，f 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型．也正因为如此，讨论二次型时，矩阵是一个有力的工具． 给出以下例子，让学生对照定义练习。 **【例 7.1】**写出二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=2x_1^2-x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-6x_2x_3$ 的矩阵，并将二次型表示为矩阵形式． **【解】**因为 $a_{11}=2, a_{22}=-1, a_{33}=5,\ a_{12}=a_{21}=2/2=1,\ a_{23}=a_{32}=-6/2=-3,$ $a_{13}=a_{31}=0,$ 所以二次型 f 的矩阵为	**线上线下结合教学** 雨课堂实现课堂互动教学环节，实时巩固练习所讲概念。

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -3\\ 0 & -3 & 5\end{pmatrix}.$$

于是 f 可表示为

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -3\\ 0 & -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

【例 7.2】写出 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 对应的二次型的一般形式，其中 $d_i,i=1,2,\cdots,n$ 至少有 1 个不为零.

【解】显然，在对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 中，$a_{ij}=\begin{cases}d_i, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}$，$i,j=1,2,\cdots,n$，所以对应于 $\boldsymbol{D}$ 的二次型为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$.

例 7.2 表明，对角矩阵的二次型只含平方项，只含平方项的二次型的矩阵是对角矩阵.

2. 线性变换与合同矩阵

定义 7.2（线性变换） 设形如（7.9）式的线性变换，矩阵形式为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$，其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_n$.

①当矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可逆时，称 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$ 为可逆线性变换或满秩或非退化线性变换.

②当矩阵 $\boldsymbol{C}$ 不可逆时，称 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$ 为不可逆线性变换或降秩或退化线性变换。

③当矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是正交矩阵时，称 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$ 为正交线性变换。显然，正交变换是一种特殊的可逆线性变换. 例如，坐标旋转变换（7.8）就是正交变换，因为

$$\boldsymbol{CC}^T=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}.$$

那么，对于给定的一个二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX}$， 如何通过可逆的线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$ 将其化为只含有平方项的二次型呢？首先证明下列重要结论.

定理 7.1 一个二次型 $f=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX}$，经过可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$ 之后，仍是一个二次型.

【证】 将可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$ 代入二次型 $f=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX}$，有 $$f=(\boldsymbol{CY})^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{CY})=\boldsymbol{Y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC})\boldsymbol{Y}.$$ 记 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$，则 $f=\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{BY}$. 因 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，所以 $\boldsymbol{B}^T=(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC})^T=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{C}^T)^T=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵，从而 $f=\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{BY}$ 仍然是一个二次型. ▮ **定义 7.3（合同）** 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同（congruent）. 记为 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$. 显然合同具有如下性质： **性质 7.1** 矩阵的合同关系具有 （1）反身性：任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与自身 $\boldsymbol{A}$ 是合同的. （2）对称性：若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 也合同. （3）传递性：若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同. **性质 7.2** 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$. **性质 7.3** 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同且 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，则 $\boldsymbol{B}$ 也为对称矩阵. 给出以下例子，使学生巩固上面的性质。 **【例 7.4】** 若两个对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，并举例说明反之不真. 【证】由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似可知，它们具有相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，记 $\boldsymbol{\Lambda}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 又由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为对称矩阵可知，必存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$，使得 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，即 $\boldsymbol{Q}_1^T A\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_2^T\boldsymbol{BQ}_2=\boldsymbol{\Lambda}$，从而 $$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}_2^T=\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1^T\boldsymbol{AQ}_1\boldsymbol{Q}_2^T=(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^T)^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^T).$$ 令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^T$，则 $\boldsymbol{C}$ 可逆，且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}$，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同. 反之，设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，取 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}$，即 $\boldsymbol{A}$	**能 力培养** 运用概念灵活解决实际问题的能力。。

与 $\boldsymbol{B}$ 合同. 但由于对任意可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ ，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{A}$，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似. 这说明，在所给条件下两矩阵合同不一定相似.

【例 7.5】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.　（B）$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.　（C）$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.　（D）$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

【解】 注意到本题中所出现的 5 个矩阵都是实对称矩阵，而实对称矩阵必相似于对角阵，因此如果两个同阶的实对称矩阵具有完全相同的特征值（包括代数重数），则这两个矩阵必相似，因而必合同，所以本题应从求矩阵的特征值出发.

因为

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda+1)(\lambda-3)=0\,,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$.

对四个选项（A）、（B）、（C）、（D）中对应的矩阵，分别经过计算可知：只有（D）选项对应的矩阵与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征值，故本题应选（D）.

3.　化二次型为标准形

定义 7.4　（标准形）只含平方项的二次型，即

$$f=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

称为**二次型的标准形**（canonical form）.

7.2.1 正交变换法

设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 为正交变换，这时有 $\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{Q}^{-1}$，所以对 n 维实向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，作正交变换

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\alpha}\,,\ \ \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\beta}\,,$$

则

$$\langle\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\rangle=\langle\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\beta}\rangle=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\beta})^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}^T\left(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\right)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle.$$

即正交变换保持向量的内积不变，因此也保持向量的长度和夹角的不变. 因此在几何空间中，正交变换保持几何图形的大小和形状不变，而这个特征是一般可逆

知识点内在联系探讨：概念给出之后，探究所含的注意点以及深层内涵。

线性变换所不具备的，这也是我们首要讨论正交变换的目的之一. 定理 7.2　任意 n 元实二次型 $f=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$，总可以通过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 化成标准形，即 $$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\overset{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}}{=}\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2=\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Y},$$ 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的列向量为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的正交单位特征向量. 【证】由于 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，所以必存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$，使得 $$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$ 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值，$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的正交单位特征向量. 此时，令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$，由于 $\boldsymbol{Q}$ 可逆，所以线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 为可逆的线性变换，并且使得二次型 $$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\overset{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}}{=}\boldsymbol{Y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$ 化为标准形.∎ 定理 7.2 表明，利用正交变换化二次型 $f=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为标准形的过程，转化为求一个正交矩阵，将实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化的过程. 进一步地，还可得到如下结论. **定理 7.3** 若二次型 $f=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 经过正交线性变换化为标准形 $f=\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Y}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 既相似又合同. 下面举例说明. 【例 7.6】求一个正交变换，化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 为标准形，并求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解. 【解】根据定理 7.2，首先写出对应的二次型矩阵，并求其特征值和特征向量. 二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$.	**后测：** 除了布置作业与在线测试外，还通过 MOOC 平台发布思考题，引发学生思考与预习。

因为 $|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$，

，

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为： $\lambda_1=0,\quad \lambda_2=2,\quad \lambda_3=6$.

对 $\lambda_1=0$，求解齐次方程组 $(0\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得对应的一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-1)^T$，

对 $\lambda_1=2$，求解齐次方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得对应的一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,0)^T$，

对 $\lambda_1=6$，求解齐次方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得对应的一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2)^T$.

然后将特征向量正交单位化，得正交矩阵 Q，进而得正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为对应于不同特征值的特征向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 相互正交，因此只需将它们单位化，得到

$$\gamma_1=\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,-1)^T,\gamma_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)^T,\gamma_2=\frac{\sqrt{6}}{6}(1,1,2)^T.$$

取 $\boldsymbol{Q}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵. 令 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，于是二次型通过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_2^2+6y_3^2$.

如果 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_2^2+6y_3^2=0$，则 $y_2=y_3=0$, 此时 $y_1=k$ 为任意常数，从而所求解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\begin{pmatrix}k\\0\\0\end{pmatrix}=k\gamma_1=\frac{\sqrt{3}}{3}k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\c\\-c\end{pmatrix}$，其中 c 为任意常数.

【例 7.7】已知二次型

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2tx_2x_3\left(t>0\right)$$

经过正交线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，其中 $\boldsymbol{X}=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T,\boldsymbol{Y}=\left(y_1,y_2,y_3\right)^T$. 求

（1）参数 t 的值；

（2）$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 在 $\|\boldsymbol{X}\|=1$ 的条件下的最大值点和最大值（最大值点指的是：使二次型 $f\ \ \boldsymbol{X}\ =\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 达到最大值的向量）.

【解】(1) 设正交变换前后二次型的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&t\\0&t&3\end{pmatrix}\text{和}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，于是由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$ 可得

$$\left(\lambda-2\right)\left(\lambda^2-6\lambda+9-t^2\right)=\left(\lambda-1\right)\left(\lambda-2\right)\left(\lambda-5\right),$$

通过比较上式两边 λ 的同次幂系数，可解得：$t=\pm2$，由于 $t>0$，所以 $t=2$.

(2) 在 $\|\boldsymbol{X}\|^2=1$ 的条件下，注意到 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 是正交变换，于是

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2\le5\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)=5\|\boldsymbol{Y}\|^2=5\|\boldsymbol{X}\|^2=5.$$

而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为：$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$，因此二次型 f 在 $\|\boldsymbol{X}\|^2=1$ 的条件下的最大值等于它的最大特征值 $\lambda_3=5$.

又对于 $\lambda_3=5$，求解齐次方程组 $\left(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得到对应的一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=\left(0,1,1\right)^T$，单位化后为 $\boldsymbol{\beta}_3=\pm\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$. 因为

$$\boldsymbol{\beta}_3{}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_3{}^T\boldsymbol{\lambda}_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\lambda}_3\boldsymbol{\beta}_3{}^T\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\lambda}_3,$$

所以所求的最大值点为对应特征值 λ_3 的单位特征向量 $\boldsymbol{\beta}_3=\pm\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$.

【例 7.8】已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

【解】由题意知，$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(1,1,0)$，于是$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^T$.

若记$\boldsymbol{Q}$的第3列为$\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$，$\boldsymbol{Q}$的其它任一列向量为$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^T$. 因$\boldsymbol{Q}$是正交矩阵，必有$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}_3=0$，即$\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3=0$，也即

$$x_1+x_3=0.$$

它的基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. 它们都是属于特征值1的特征向量，注意到$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$已经是正交的，只需将它们分别单位化，可得$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. 于是

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

因而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^T=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

7.2.2 配方法：

将二次型配成完全平方式的方法. 通常有两种情形，其各自的配方步骤如下：

（1）二次型f中含有平方项情形：若二次型含有x_i的平方项，先把含有x_i的乘积项集中，然后配方，再对其余的变量同样进行，直到都配成平方项为止，将每一个平方项的内部设为一个新变量，进而找出所求的可逆线性变换，得到二次型的标准形. 一般先从含x_1的平方项开始，依次类推.

（2）二次型 f 中不含平方项情形：这时系数 $a_{ij},i\neq j$ 不全为零. 先作可逆线性变换，$\begin{cases} x_i=y_i-y_j \\ x_j=y_i+y_j \\ x_k=y_k \end{cases}$ $\left(k=1,2,\cdots,n\text{且}k\neq i,j\right)$把二次型化为含平方项的二次型，然后再按（1）的方法配方.

下面举例说明.

【例 7.9】利用配方法化二次型

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$

为标准形，并写出所用的变换矩阵.

【解】由于 f 中含变量 x_1 的平方项，故先把含 x_1 的项集中起来，再配方可得

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4\right)+2x_2^2+x_4^2+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$

$$=\left(x_1+2x_2+2x_3+x_4\right)^2-2x_2^2-4x_3^2-6x_2x_3-2x_2x_4-2x_3x_4$$

再把剩余项中含 x_2 的项集中起来配方可得

$$=\left(x_1+2x_2+2x_3+x_4\right)^2-2\left(x_2+\frac{3}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4\right)^2+\frac{1}{2}x_3^2+\frac{1}{2}x_4^2+x_3x_4$$

$$=\left(x_1+2x_2+2x_3+x_4\right)^2-2\left(x_2+\frac{3}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4\right)^2+\frac{1}{2}\left(x_3+x_4\right)^2.$$

令$\begin{cases} y_1=x_1+2x_2+2x_3+x_4, \\ y_2=\qquad x_2+\dfrac{3}{2}x_3-\dfrac{1}{2}x_4, \\ y_3=\qquad\qquad x_3+x_4, \\ y_4=\qquad\qquad\quad x_4, \end{cases}$，即$\begin{cases} x_1=y_1-2y_2+y_3-3y_4, \\ x_2=y_2-\dfrac{3}{2}y_3+2y_4, \\ x_3=y_3-y_4, \\ x_4=y_4. \end{cases}$

把二次型 f 化为标准形 $f=y_1^2-2y_2^2+\dfrac{1}{2}y_3^2$. 所用的变换矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -\dfrac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}，\text{其中}\left|\boldsymbol{C}\right|\neq 0.$$

【例 7.10】利用配方法化二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 为标准形，并写出所用的可逆线性变换.

【解】在 f 中不含平方项，由于含有乘积项 x_1x_2，故令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases} \text{即} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

使得

$$f = -4(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 2(y_1 + y_2)y_3 + 2(y_1 - y_2)y_3 = -4y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_1y_3.$$

再配方得 $$f = -4\left(y_1 - \frac{1}{2}y_3\right)^2 + 4y_2^2 + y_3^2.$$

令 $$\begin{cases} z_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_3, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3, \end{cases} \text{即} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{或} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

则

$$f = -4z_1^2 + 4z_2^2 + z_3^2.$$

所用的可逆线性变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

三、 回顾和小结

小 结：

1. 二次型与其对称矩阵、合同的概念；

2. 化二次型为标准形的三种的运算方法；

四、 复习思考与作业

思考题：通过中国大学生慕课 Mooc 发布在线讨论

1、可以用非对称矩阵表示二次型吗？若可以，为什么我们通常采用对称矩阵表示呢？

作业题： 通过北化在线发布本次课程的作业和在线小测。	

第（25）次授课

教学章节	第七章第 7.2，7.3 节	学时	2 学时
教材 和参考书	22. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书） 23. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书） 24. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考） 25. Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra，Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考） 26. Jim Hefferon，*Linear Algebra,* available for free online，2014. （教学参考） 27. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008.（教学参考） 28. 刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）		
1.教学目的： 化二次型为标准形的初等变换法；二次型的唯一性； 2.教学重点： 初等变换法，正负惯性指数，规范形 3.教学难点：掌握初等变换法，求出二次型的正负惯性指数和规范形。			
1.教学内容：化二次型为标准形的初等变换法；二次型的唯一性及规范形； 2.时间安排：2 学时； 3.教学方法：讲授与讨论相结合； 4.教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，mooc 平台讨论+测试。			
教学设计： **课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析）：** 1.复习二次型的标准形前两种化法； 课中检测，并探讨重点、难点知识点 **多种形式的课堂讨论：** ① 使用不同方法化出的二次型的标准形一样吗？			

②不同的话，有没有共同点？ **课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况）** 1.布置书后作业，北化在线平台提交； 2.在北化在线平台完成课后测试； 3.在微信群、企业微信群、MOOC 平台、线下随时回答解决同学的问题；

基本内容	教学反思
see below	**前测：** 测试学生的二次型的标准形的概念。

7.2.3 初等变换法

本节讨论用初等变换法化二次型为标准形的方法. 我们知道，任意一个二次型都可以经过可逆线性变换化为标准形，而化二次型 $f=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为标准形，就是寻求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 成为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，即 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$. 因为 $\boldsymbol{C}$ 可逆，所以存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l$，使得 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l$，于是

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_l^T\boldsymbol{P}_{l-1}^T\cdots\boldsymbol{P}_1^T\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l=\boldsymbol{\Lambda},\\ \qquad\qquad\quad\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l=\boldsymbol{C}.\end{cases}$$

（7. 10）

从而我们有如下定理.

定理 7. 4 任意一个实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必合同于某个对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$.

式（7. 10）表明，对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一系列初等列变换和相应的初等行变换，把 $\boldsymbol{A}$ 化为对角矩阵的同时，其中的初等列变换就把单位矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 化为变换矩阵 $\boldsymbol{C}$. 于是得到化二次型为标准形的初等变化法. 其具体步骤如下：

写出二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$，并构造 $2n\times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$；对 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$ 每施行一次初等列变换，就对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次同样的初等行变换，直至把 $\boldsymbol{A}$ 化为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，此时单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 就化为满秩矩阵 $\boldsymbol{C}$，即

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{同时对}A\text{施行相同的初等行变换}]{\text{施行初等列变换}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}. \qquad (7.\,11)$$

类似地，也可以构造构造 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{E})$，对 $(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{E})$ 每施行一次初等行变换，就对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次同样的初等列变换，直至把 $\boldsymbol{A}$ 化为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，此时单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 就化为满秩矩阵 $\boldsymbol{C}$，即

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E}) \xrightarrow[\text{同时对}\boldsymbol{A}\text{施行相同的初等列变换}]{\text{施行初等行变换}} (\boldsymbol{\Lambda} \mid \boldsymbol{C}). \tag{7.12}$$

得到的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$，进一步得到满秩线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 和二次型的标准形.

【例 7.11】用初等变换法将例 7.10 中的二次型化为标准形，并求出所用的可逆线性变换.

【解】例 7.10 中二次型 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

利用式（7.11）提供的方法（也可利用式（7.12）提供的方法），计算如下

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1+r_3]{c_1+c_3} \left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2+\frac{1}{2}r_1]{c_2+\frac{1}{2}c_1} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+(-\frac{1}{2})r_1]{c_3+(-\frac{1}{2})c_1} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+3r_2]{c_3+3c_2} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right).$$

故令

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}，\text{其中} |\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

则该可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 将二次型化为标准形 $f=2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2+4y_3^2$.

思政元素

矩阵对向量的作用可用于图像处理，在国防安全以及防疫工作中起到了重要作用。

<table>
<tr>
<td>

思政元素：

通过三种方法，可以体现出数学方法的巧妙性，公式的简洁美。

第三节　二次型的不变量和惟一性

一、　前侧+回顾：

通过雨课堂发布问答题：二次型的标准形是什么？

回顾：将例 7.11 与例 7.10 的结果加以比较，可以看到：同一个二次型用不同的可逆线性变换化为标准形时，所得的标准形一般是不同的，但有两点是相同的：

（1）标准形中非零系数个数（即标准形的项数）；

（2）标准形中正平方项和负平方项的项数.

引发思考：这个结论是否具有一般性呢？

二、　浸入式学习与价值引领

1. 二次型的秩与惯性定理

定义 7.5(二次型的秩) 二次型 $f=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX},\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$ 中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 f 的秩(rank of quadratic form).

显然，标准二次型的秩等于标准形的项数.

定理 7.4 一个二次型经可逆线性变换后秩保持不变.

【证】　设二次型 $f=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX}$ 经可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$ 化为二次型 $f=\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{BY}$，其中 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$. 因为 C 是可逆矩阵，而矩阵乘以可逆矩阵秩不变，所以 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.▌

推论 7.1　一个二次型经过任一可逆线性变换化为标准形，则标准形的项数总是等于原二次型的秩.

给出实例，让学生练习，其中第一题找两位学生上台板书。

【例 7.12】求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩.

【解】方法一. 因为 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$

$$=2{x_1}^2+2{x_2}^2+2{x_3}^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3,$$

所以二次型的矩阵为

</td>
<td>

线　上线　下结　合教学

雨课堂实现课堂互动教学环节，实时巩固练习所讲　概念。

</td>
</tr>
</table>

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

又因为 $A\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&-3\\0&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$，从而 $R(A)=2$， 即二次型的秩为 2.

方法二．因为 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$

$$=2{x_1}^2+2{x_2}^2+2{x_3}^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

$$=2(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2.$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3,\\y_2=x_2-x_3,\\y_3=x_3,\end{cases}$ 则经可逆线性变换 $\begin{cases}x_1=y_1-\frac{1}{2}y_2-y_3,\\x_2=y_2+y_3,\\x_3=y_3,\end{cases}$

原二次型化为标准形 $f=2{y_1}^2+\frac{3}{2}{y_2}^2$，由此得二次型的秩为 2.

【思考】若令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2,\\y_2=x_2-x_3,\\y_3=x_3+x_1,\end{cases}$ 则 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$，由此得到二次型的秩为 3．这种做法对吗？为什么？

定理 7.5 设二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 r，有两个可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$，使得

$$f=k_1y_1^2+\cdots+k_py_p^2-k_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-k_ry_r^2,\ (k_i>0,i=1,2,\cdots,r)$$

及

$$f=\lambda_1z_1^2+\cdots+\lambda_qz_q^2-\lambda_{q+1}z_{q+1}^2-\cdots-\lambda_rz_r^2,\ (\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,r).$$

则 $p=q$.

定义 7.6（惯性指数和符号差）二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准形中，正平方项的项数 p 称为二次型 f 的正惯性指数（positive index of inertia），负平方项的项数 $r-p$ 称为二次型 f 的负惯性指数（negitive index of inertia），正负惯性指数的差 $p-\left(r-p\right)=2p-r$ 称为

能力培养
运用概念灵活解决实际问题的能力。。

知识点内

二次型 f 的符号差（signature）.

2. 二次型的规范形

二次型 $f=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 经过可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Y}$ 化为如下标准形：

$$f=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^T\left(\boldsymbol{C}_1^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1\right)\boldsymbol{Y}=d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2, \qquad (7.13)$$

其中 $d_i>0, i=1,2,\cdots,r, r=\text{秩}\left(f\right)=R\left(\boldsymbol{A}\right)$.

对二次型（7.13），再作可逆线性变换

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{1}{\sqrt{d_1}}z_1, \\ \vdots \\ y_r=\dfrac{1}{\sqrt{d_r}}z_r, \\ y_{r+1}=z_{r+1}, \\ \vdots \\ y_n=z_n \end{cases} \text{或} \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{Z}\text{，其中} \boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{d_r}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

则原二次型通过可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{Z}$ 化为

$$f=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2. \qquad (7.14)$$

定义 7.7（规范形）如果二次型标准形平方项的系数只在 $-1,0,1$ 三个数中取值，即形如式（7.14）的二次型称为规范形（normal form of quadratic form）.

定理 7.6 任何实二次型 f 总可以通过适当的可逆线性变换化为规范形，且规范形是唯一的.

定理 7.7 任意 n 阶实对称矩阵必合同于形如

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_p & & \\ & -\boldsymbol{E}_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

的对角矩阵,其中 p 和 r 分别为对应二次型的正惯性指数和秩，$\boldsymbol{E}_p,\boldsymbol{E}_{r-p}$ 分别是 p 阶，$r-p$ 阶单位矩阵.

【例 7.13】已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_2^2+ax_3^2-4x_2x_3\ (a<-2)$.

在联系探讨：
概念给出之后，探究所含的注意点以及深层内涵。

后测：
除了布置作业与在线测试

(1) 求二次型的规范形；

(2) 求二次型的惯性指数和符号差.

【解】方法一. (1) 用配方法把二次型 f 化为

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+ax_2^2+ax_3^2-4x_2x_3=2x_1^2+a\left(x_2-\frac{2}{a}x_3\right)^2+\left(a-\frac{4}{a}\right)x_3^2 .$$

由 $a<-2$，知 $a-\frac{4}{a}<0$. 于是，令

$$\begin{cases} y_1=\sqrt{2}x_1 \\ y_2=\sqrt{-a}\left(x_2+\dfrac{2}{a}x_3\right), \\ y_3=\sqrt{\dfrac{4}{a}-a}\,x_3, \end{cases}$$

可得 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=y_1^2-y_2^2-y_3^2$，且所用的线性变换是可逆的. 由此可知，二次型 f 的正惯性指数为1，负惯性指数为2，符号差为-1.

【解】方法二. 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&a&-2\\0&-2&a\end{pmatrix}$，则因为

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-a&2\\0&2&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-a-2)(\lambda-a+2)=0 ,$$

所以$\boldsymbol{A}$的3个特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=a+2,\lambda_3=a-2$，于是二次型 f 的标准形为

$$f=2y_1^2+(a+2)y_2^2+(a-2)y_3^2 .$$

由 $a<-2$，知 $a+2<0$，$a-2<0$. 于是，令

$$\begin{cases} z_1=\sqrt{2}y_1 \\ z_2=\sqrt{-(a+2)}\,y_2 , \\ z_3=\sqrt{(2-a)}\,y_2 \end{cases}$$

得 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=z_1^2-z_2^2-z_3^2$，且所用的线性变换是可逆的. 由此可知，二次型 f 的正惯性指数为1，负惯性指数为2，符号差为-1.

定理 7.8 两个同阶实对称矩阵合同的充要条件是它们有相同的秩及相同的正惯性指数.

外，还通过MOOC平台发布思考题，引发学生思考与预习。

【例 7.14】与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$ 合同的矩阵是（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

【分析】 应选（B）. 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及其选项中的矩阵均为实对称矩阵，为判定与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵，根据定理 7.7，应当首先求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩及其正惯性指数.

【解】方法一. 由 $\boldsymbol{A}$ 构成二次型，并用配方法得

$$f=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=x_1^2-x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2=x_1^2-\left(x_2-2x_3\right)^2+6x_3^2=y_1^2-y_2^2+6y_3^2,$$

可见 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，正惯性指数为 2，而选项中只有（B）的秩为 3，正惯性指数为 2. 故应选（B）.

方法二. 用初等变换法化 $\boldsymbol{A}$ 为对角阵，可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+2c_2]{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

可见 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，正惯性指数为 2，而选项中只有（B）的秩为 3，正惯性指数为 2，故应选（B）.

方法三. 直接求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，由

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda+1&-2\\0&-2&\lambda-2\end{vmatrix}=\left(\lambda-1\right)\left(\lambda+2\right)\left(\lambda-3\right),$$

可见 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-2,3$，从而 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，正惯性指数为 2，而选项中只有（B）的秩为为 3，正惯性指数为 2. 故应选（B）.

三、　回顾和小结

小 结：

1. 二次型的秩、惯性指数、符号差、规范形的概念；
2. 二次型的惯性定理；
3. 求规范形的方法。

四、　复习思考与作业

思考题：通过中国大学生慕课 Mooc 发布在线讨论

1.任意的二次型都可以化为规范形吗？ 2.二次型化成规范形有什么意义？ **作业题：** 习题 7.3：4、5、6 通过北化在线发布本次课程的小测	

第（26）次授课

<table>
<tr><td>教学章节</td><td>第二章　第 7.4 节</td><td>学时</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>教材和
参考书</td><td colspan="3">7. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书）
8. 崔丽鸿，姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社，2014.（习题课用书）
9. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考）
10. Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
11. Jim Hefferon，Linear Algebra, available for free online，2014.（教学参考）
12. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考）
刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="4">4. 教学目的：掌握正定、负定的定义；判断二次型是否是正定、负定；
5. 教学重点：二次型正定的判断；
6. 教学难点：应用等价性质判断二次型的正定性.</td></tr>
<tr><td colspan="4">5. 教学内容：二次型的正定性；
6. 时间安排：2 学时；
7. 教学方法：讲授与讨论相结合；
8. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，MOOC 平台讨论+测试。</td></tr>
<tr><td colspan="4">教学设计：
课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析)：
1.复习正定性的概念性质；
2.探寻什么样的二次型是正定的。
课中检测，并探讨重点、难点知识点
多种形式的课堂讨论：
① 启发式提问引起课堂讨论：是否存在一个二次型，无论变量如何，值永远为正？
② 提问预习结果：正定二次型的几何含义？</td></tr>
</table>

课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况） 1.布置书后作业，北化在线平台提交； 2.在北化在线平台完成课后测试； 3.在微信群、企业微信群、MOOC 平台、线下随时回答解决同学的问题；	
基本内容	**教学反思**

一、 浸入式学习与价值引领

7.4 二次型的正定性

正定二次型在实二次型的研究内容中占有举足轻重的地位，本节给出相应的定义和常见的判别方法.

定义 7.8（正定二次型和正定矩阵） 设有实二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{A}$ 为 f 的矩阵. 对任意的 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，

（1）若恒有 $f>0$，则称 f 为正定二次型（positive definite quadratic form），并称实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵（positive definite matrix）.

（2）若恒有 $f\geq 0$，则称 f 为半正定二次型（positive semidefinite quadratic form），并称实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵（positive semidefinite matrix）.

（3）若 f 的值有时为正有时为负，则称为不定二次型（indefinite quadratic form），并称实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为不定矩阵（indefinite matrix）.

【例 7.15】判断下列实二次型的正定性，并说明理由.

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2$.

（2） $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2$.

（3） $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-3x_2^2+4x_3^2$.

【解】(1) 是正定二次型.因为，在实数范围内，对任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$，都有 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2\geq 0$.

并且若 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2=0$，则必有 $x_1=x_2=x_3=0$，即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$；反之，若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即 $x_1=x_2=x_3=0$ 时，则必有 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2=0$. 这意味着，对任意的 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，都有 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2>0$ 成立. （2）半正定二次型.因为，尽管在实数范围内，对任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$，有 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2\geq 0$. 但是，若 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2=0$，则必有 $x_1=x_2=x_3=0,x_4=k$，k 为任意常数，这意味着存在 $\boldsymbol{x}=(0,0,0,k)\neq\boldsymbol{0}$，使得 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2=0$ 成立.换言之，对任意的 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，都有 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2\geq 0$ 成立. （3）不定二次型.因为，若取 $\boldsymbol{x}=(1,0,0)^T\neq\boldsymbol{0}$, 则 $f(x_1,x_2,x_3)=2>0$；若取 $\boldsymbol{x}=(0,1,0)^T\neq\boldsymbol{0}$, 则 $f(x_1,x_2,x_3)=-3<0$.这意味着, f 的值有时为正有时为负. 【例 7.16】二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 为正定的必要条件是 $a_{ii}>0$. **【证】**因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，所以对于非零列向量 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_i\neq\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{e}_i$ 是第 i 个分量为 1 其余分量为 0 的 n 维单位列向量，$f(0,\cdots,1,\cdots,0)=a_{ii}>0$. 【例 7.17】 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 为半正定的充要条件是对任意实数 $t>0,t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 是正定的. **【证】**对于任意的 $\boldsymbol{x}$，有 $\boldsymbol{x}^T(t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=t\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. (7.15) 必要性.若 $\boldsymbol{A}$ 是半正定的，则对任意的 $\boldsymbol{x}\neq 0$，有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq 0$.另外对任意的实数 $t>0$，又有 $t\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}>0$，于是由式（7.15）可知，$\boldsymbol{x}^T(t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=t\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$. 所以 $t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 是正定的.	**能力培养** 培养学生的计算能力。

充分性.反之，若对任意实数$t>0, t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$是正定的，则由式（7.15）可知，对于任意的$\boldsymbol{x}\neq 0$，有 $t\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$. 注意到$t\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$都是实数，在上式中，当$t\to 0^+$时取极限，便得$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq 0$，所以$\boldsymbol{A}$是半正定的. 一般来说，从定义出发判定一个二次型的正定性是不够的.下面给出更为有效和针对性的方法. **定理 7.9** 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$是$n$元实二次型，则下列命题等价: （1）$f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$是正定二次型（或$\boldsymbol{A}$是正定矩阵）. （2）$f$的矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值全为正. （3）$f$的标准形的$n$个系数全为正. （4）$f$的正惯性指数为$n$. （5）$f$的矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{E}$合同. （6）存在可逆矩阵$\boldsymbol{B}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$. （7）$A$的各阶顺序主子式都为正，即 $$\Delta_1=\lvert a_{11}\rvert>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}>0,\quad \cdots,\quad \Delta_n=\lvert\boldsymbol{A}\rvert>0.$$ 其中$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}>0$为$\boldsymbol{A}$的$k$阶顺序主子式,$k=1,2,\cdots,n$. 【证】这里采用循环法证明$(1)$到$(6)$，并略去$(7)$的证明. $(1)\Rightarrow(2)$.由实二次型的性质可知，存在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，化二次型	**前测：请同学们试着写出正定矩阵的性质，雨课堂回答。培养学生思维能力。**

$f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值.

因为 f 是正定矩阵，所以对于非零列向量 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{e}_i$ 是第 i 个分量为 1 其余分量为 0 的 n 维单位列向量，必有 $f=\lambda_i>0\ i=1,2,\cdots,n$.

$(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(5)$.由定理 7.5 和 7.7 立即可得.

$(5)\Rightarrow(6)$.由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同，必存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$，从而

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{C}^T\right)^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{C}^{-1}=\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)^T\boldsymbol{C}^{-1},$$

令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}$，于是可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$.

$(6)\Rightarrow(1)$.对任意的实 n 维非零列向量 $\boldsymbol{x}$，由 $\boldsymbol{B}$ 可逆知，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，于是

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=X^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\right)^T\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\right)>0,$$

故 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型（或 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵）.█

【例 7.18】n 元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型，则下列结论不成立的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值均大于零；(B) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互异；(C) $|\boldsymbol{A}|\neq0$；(D) $|\boldsymbol{A}|>0$.【解】根据定理 7.9 立即可得，应选（B）.

【例 7.19】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，且满足条件 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，已知 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $R(\boldsymbol{A})=2$. 当 k 为何值时，矩阵 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

【解】因为 $(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})^T=\boldsymbol{A}^T+(k\boldsymbol{E})^T=\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 为实对称矩阵.

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值，则由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 可得 $\lambda^2+2\lambda=0$. 于是

$\lambda=-2,\lambda=0$．又因为实对称矩阵必可对角化，而$R(A)=2$，因此矩阵$\boldsymbol{A}$的全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=0$．又$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$的全部特征值为$\mu_1=\mu_2=-2+k,\mu_3=k$．于是当$k>2$时，矩阵$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$的全部特征值大于零，故此时$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$为正定矩阵． 【例 7.20】设$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$都是$n$阶正定矩阵，证明： （1）$\boldsymbol{AB}$特征值全大于零. （2）若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则$\boldsymbol{AB}$是正定矩阵. 【证】(1) 因为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$都是$n$阶正定矩阵，所以存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}$.于是 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P})(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{QP}^T\boldsymbol{PQ}^T=(\boldsymbol{PQ}^T)^T(\boldsymbol{PQ}^T)$． 又$\boldsymbol{PQ}^T$是可逆矩阵，从而矩阵$D=(\boldsymbol{PQ}^T)^T(\boldsymbol{PQ}^T)$是正定矩阵，它的所有特征值大于零，由上式可知，$\boldsymbol{AB}$与$\boldsymbol{D}$相似，故$\boldsymbol{AB}$的特征值全大于零. （2）因为$(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$，所以$\boldsymbol{AB}$为实对称矩阵.又由（1）知，$\boldsymbol{AB}$的特征值全为正数，故$\boldsymbol{AB}$是正定矩阵. ▊ 事实上，有关二次型的正定性，还有负定、半负定的概念以及相应的判定方法. **定义 7.9 (负定二次型和负定矩阵)** 设有实二次型$f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$，$\boldsymbol{A}$为$f$的矩阵.对任意的$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$， （1）若恒有$f<0$，则称$f$为负定二次型（negative idefinite quadratic form），并称实对称矩阵$\boldsymbol{A}$为负定矩阵（negative idefinite matrix）. （2）若恒有$f\le 0$，则称f为半负定二次型（negative semidefinite quadratic form），并称实对称矩阵$\boldsymbol{A}$为半负定矩阵 negative semidefinite matrix）.	**课堂讨论同学们小组讨论正定矩阵的特征值的特点？慕课平台回答讨论结果。**

显然，二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是负定的充要条件是 $-f=-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型.于是有如下定理.

定理 7.10 设 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是 n 元实二次型，则下列命题等价:

（1） $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是负定二次型（或 $\boldsymbol{A}$ 是负定矩阵）.

（2） f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为负.

（3） f 的标准形的 n 个系数全为负.

（4） f 的负惯性指数为 n.

（5） f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $-\boldsymbol{E}$ 合同.

（7）存在可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$.

（8） $\boldsymbol{A}$ 的奇数阶顺序主子式都为负，偶数阶顺序主子式都为正，即

$$\Delta_k=(-1)^k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}>0, k=1,2,\cdots,n.$$

【例 7.21】设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=a\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$，问

（1） a 满足什么条件时，f 是正定的;

（2） a 满足什么条件时，f 是负定的.

【解】 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$，下面采用主子式的判别方法.

（1）　令 $\begin{cases} \Delta_1 = a_{11} = a > 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 > 0, \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a+1)^2(a-2) > 0, \end{cases}$ 解得 $a > 2$，

所以当且仅当 $a > 2$ 时，f 是正定的.

（2）　令 $\begin{cases} \Delta_1 = a_{11} = a < 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 > 0, \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a+1)^2(a-2) < 0, \end{cases}$ 解得 $a < -1$，

所以当且仅当 $a < -1$ 时，f 是负定的.

一、　回顾和小结

1. 复习正定、负定的定义

2. 正定、负定二次型的等价性质；

四、　复习思考与作业

思考题：

如果 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，则存在 n 阶正定矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2$ 吗？

作业题：

北化在线发布作业和测试

第（27）次授课

<table>
<tr><td>教学章节</td><td>第七章　第 7.5 节</td><td>学时</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>教材和
参考书</td><td colspan="3">13. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书）
14. 崔丽鸿,姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社,2014.（习题课用书）
15. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考）
16. <u>Gilbert Strang</u>, Introduction to Linear Algebra, Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
17. Jim Hefferon，Linear Algebra, available for free online，2014.（教学参考）
18. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考）
刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="4">7. 教学目的：掌握用二次型的一些应用；了解用计算软件解决的一些实例；
8. 教学重点：二次型的应用；
9. 教学难点：应用二次型解决相关问题.</td></tr>
<tr><td colspan="4">9. 教学内容：二次型的应用及其计算软件举例；
10. 时间安排：2 学时；
11. 教学方法：讲授与讨论相结合；
12. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，MOOC 平台讨论+测试。</td></tr>
<tr><td colspan="4">教学设计：
课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析）：
　1.查找二次型的相关应用
课中检测，并探讨重点、难点知识点
　多种形式的课堂讨论：
　① 启发式提问引起课堂讨论：二次型有哪些应用？
课后：（互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况）</td></tr>
</table>

1.布置书后作业，北化在线平台提交；

2.在北化在线平台完成课后测试；

3.在微信群、企业微信群、MOOC 平台、线下随时回答解决同学的问题；

基本内容	教学反思

一、 浸入式学习与价值引领

7.5 二次型应用及其及其计算软件举例

【例 7.22】（二次曲线和二次曲面分类）为方便，首先给出如下常见的二次曲线和二次曲面在直角坐标系下的标准方程以及对应二次型的秩、正定性和正负惯性指数.

序号	曲线或曲面的标准方程	曲线或曲面的名称	对应二次型的秩	对应二次型的正定性	正、负惯性指数
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	椭圆曲线	2	正定	2, 0
2	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 或 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	双曲线	2	不定	1，1
3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c, c>0$	椭圆柱面	2	半正定	2， 0
4	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=c, c>0$ 或 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c, c>0$	双曲柱面	2	不定	1， 1
5	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	椭球面	3	正定	3， 0

6	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 或 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 或 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	单叶双曲面	3	不定	2，1
7	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 或 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 或 $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	双叶双曲面	3	不定	1，2
8	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0$	锥面	3	不定	2, 1

*事实上，给定一个二次曲面（或者二次曲线）在任意直角坐标系下的方程，都可以通过可逆的线性变换，把它化成标准方程.有关这一点，简单说明如下：

已给二次曲面 S 的一般方程：

$$F(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz \\ +2b_1x+2b_2y+2b_3z+d=0.$$

（7.16）

记

$$\varphi(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},$$

（7.17）

这里 $\boldsymbol{X}=(x,y,z)^T$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{13} & \boldsymbol{a}_{23} & \boldsymbol{a}_{33} \end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，$\boldsymbol{Y}=(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})^T$，$P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i\,(i=1,2,3)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征

能力培养

培养学生的计算能力。

前测：请同学们试着写出三阶所知道的二次曲面的方程，雨课堂回答。培养学生思维能力。

值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$的正交特征向量，则方程（7.16）化为

$$\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3\tilde{z}^2+2\tilde{b}_1\tilde{x}+2\tilde{b}_2\tilde{y}+2\tilde{b}_3\tilde{z}+\tilde{d}=0.$$

（7.18）

对式（7.18）左端进行完全配方，得到

$$\lambda_1(\tilde{x}+c_1)^2+\lambda_2(\tilde{y}+c_2)^2+\lambda_3(\tilde{z}+c_3)^2+c=0.$$

其中c_1,c_2,c_3,c均为常数.平移坐标原点$\begin{cases}\tilde{x}=\underset{\sim}{x}-c_1,\\ \tilde{y}=\underset{\sim}{y}-c_2,\\ \tilde{z}=\underset{\sim}{z}-c_3,\end{cases}$得到式（7.16）的标准形式

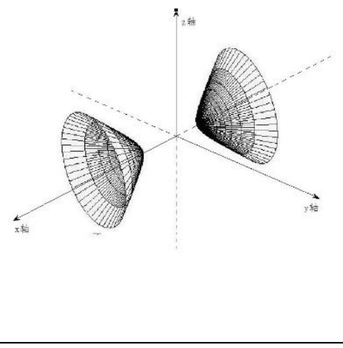
$$\lambda_1\underset{\sim}{x}^2+\lambda_2\underset{\sim}{y}^2+\lambda_3\underset{\sim}{z}^2+c=0.$$

（7.19）

式（7.16）中的二次曲面S化简后的方程（7.19）称为它的标准方程.

在对三元二次方程（7.16）化简的过程中，我们得出，把空间二次曲面方程化成标准形式，首先是只要把它的二次项部分化成只含完全平方项的二次式，然后再根据平方项系数进行配方后，进行一次坐标系平移.同时还看到，在直角坐标系下，$\boldsymbol{A}$的三个特征值是至关重要的，并且已经证明在化简过程中，它保持不变，称为曲面S的不变量.在正交线性变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$时，正交单位特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$从几何角度理解就是新直角坐标系的三个轴的基本向量，以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为坐标轴时，（7.17）可以去掉交叉项$xy,yz,xz$.一般称这三个方向是二次曲面$S$的主方向.

设$\boldsymbol{A}$为3阶实对称矩阵，如果



二次曲面方程$(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$在正交变换下的标准方程的图形如图7-1，则

$\boldsymbol{A}$ 的正特征值个数为（　　）.[redacted]

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.　　图 7-1

【答案】 应选(B).

【解】此二次曲面为旋转双叶双曲面，此曲面的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$．故 A 的正特征值个数为 1．故应选(B).

【例 7.23】设 $f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ 是正定二次型.证明：椭圆域 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2\le 1$ 的面积等于 $\frac{\pi}{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}}$.

【解】二次型为 $f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ 对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ_1,λ_2，则由 f 是正定的，可知，$\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$.由二次型的知识知，必在坐标系的旋转变换下，可将椭圆 $f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=1$ 化成标准方程

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2=1 \text{ 或 } \frac{x_1^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}\right)^2}+\frac{y_1^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}\right)^2}=1.$$

因此该椭圆域的面积为

$$\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}.$$

又根据 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值之积等于行列式之值，即 $\lambda_1\lambda_2=|\boldsymbol{A}|=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$，从而该椭圆域的面积为 $\frac{\pi}{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}}$.

【例 7.24】已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$，可以经过

。

正交变换$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$化为椭圆柱面方程$\eta^2+4\zeta^2=4$，求二次型对应矩阵的特征值以及$a,b$的值.

【解】设$f(x,y,z)=x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$，由题意可知，二次型通过正交变换化为椭圆柱面方程$\eta^2+4\zeta^2=4$，所以$\eta^2+4\zeta^2$是二次型$f(x,y,z)$的标准形．因此标准形中平方项的系数0,1,4即为二次型对应矩阵的特征值$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=5$. 又变换前后二次型的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{和} \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

由于是正交变换，所以矩阵$\boldsymbol{A}$与B相似，因而它们具有相同的迹和相同的行列式，即

$$\begin{cases} tr(\boldsymbol{A})=tr(\boldsymbol{B}), \\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|. \end{cases}$$

而

$$tr(\boldsymbol{A})=1+a+1=a+2, \quad tr(B)=0+1+4=5,$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2b-1-b^2, \quad |B|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

所以 $\begin{cases} a+2=5, \\ 2b-1-b^2=0. \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} a=3, \\ b=1. \end{cases}$

*【例 7.25】将二次曲面$x^2+y^2+z^2-2xz+4x+2y-4z-5=0$化简，并判断其为何种二次曲面.

【解】首先将二次项部分化为标准形.令$\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xz$，则

$$\varphi(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}.$$

由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$得到$\boldsymbol{A}$的特征值是：$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=0$.进一步可得对应于它们的单位正交特征向量分别为:

$$\boldsymbol{x}_1=(0,1,0)^T,\boldsymbol{x}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,\boldsymbol{x}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,$$

做正交线性变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，其中$X=(x,y,z)^T$，$Q=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$，$\boldsymbol{Y}=(x',y',z')^T$，即

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}z',\\ y=x',\\ z=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}z',\end{cases}$$

则二次项部分$\varphi(x,y,z)=x'^2+2y'^2$,一次项部分$4x+2y-4z-5=2x'+4\sqrt{2}y'-5$,于是二次曲面方程化为:

$$x'^2+2y'^2+2x'+4\sqrt{2}y'-5=0.$$

根据x'^2,y'^2,z'^2系数进行配方

$$(x'+1)^2+2\left(y'+\sqrt{2}\right)^2=10,$$

进行坐标平移变换，令

$$\begin{cases}x''=x'+1,\\ y''=y'+\sqrt{2},\\ z''=z',\end{cases}$$

二次曲面方程化为$x''^2+2y''^2=10$. 显然S是椭圆柱面.

【例 7.26】（多元函数极值）设n元函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在$x_0=\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)$的某邻域内有一阶、二阶连续偏导数，并记$f_i'(x_0)=\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=x_0}$，$i=1,2,\cdots,n$，

$f''_{ij}(x_0)=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x=x_0}$, $i, j=1,2,\cdots,n$.

定义 7.10（驻点） 若 $f'_i(x_0)=0$, $i=1,2,\cdots,n$, 则称 x_0 为函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的驻点（stationary point）.

定义 7.11（海森矩阵） 称矩阵 $H(x_0)=\begin{vmatrix} f''_{11}(x_0) & f''_{12}(x_0) & \cdots & f''_{1n}(x_0) \\ f''_{21}(x_0) & f''_{22}(x_0) & \cdots & f''_{2n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f''_{n1}(x_0) & f''_{n2}(x_0) & \cdots & f''_{nn}(x_0) \end{vmatrix}$ 为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $x_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的 n 阶海森矩阵（Hesse matrix）.

根据多元连续函数的性质可知，$f''_{ij}(x)=f''_{ji}(x)$, $i, j=1,2,\cdots,n$, 所以海森矩阵 $H(x_0)$ 是对称矩阵.

则利用多元函数的泰勒（Taylor）公式可以证明如下结论.

结论 1 当 $H(x_0)$ 是正定矩阵时，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值；

结论 2 当 $H(x_0)$ 是负定矩阵时，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值；

结论 3 当 $H(x_0)$ 是不定矩阵时，$f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极大值；

结论 4 当 $H(x_0)$ 是半定或半负定矩阵时，$f(x_0)$ 可能是 $f(x)$ 的极值，也可能不是 $f(x)$ 的极值，需要用其他方法来判定.

【例 7.27】求函数 $u=x_1^3+3x_1x_2+3x_1x_3+x_2^3+3x_2x_3+x_3^3$ 的极值.

【解】求偏导数令其为零，解出驻点.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1}=3x_1^2+3x_2+3x_3=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2}=3x_1+3x_2^2+3x_3=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3}=3x_1+3x_2+3x_3^2=0. \end{cases}$$ 得驻点为 $P_1(0,0,0), P_2(-2,-2,-2)$.

求二阶偏导数，得到海赛矩阵. 对每一个驻点，逐一判别.

因为 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=6x_1$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}=3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}=3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=6x_2$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3}=3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=6x_3$.

对 P_1 点，海赛矩阵为 $H(P_1)=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$，利用顺序主子式方法判定可知，$H\left(P_1\right)$是不定矩阵，故 $H(P_1)$ 不是函数 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 的极值点.

对 P_2 点,海赛矩阵为 $H(P_2)=\begin{pmatrix} -12 & 3 & 3 \\ 3 & -12 & 3 \\ 3 & 3 & -12 \end{pmatrix}$, 利用顺序主子式方法判定可知，$H(P_2)$ 是负定矩阵，故 P_2 是函数 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 的极大值点，并且极大值为 $u(P_2)=12$.

【例 7.28】利用 MATLAB 工具求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，把二次型

$$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$

化为标准型.

【解】二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容:

```
A=[0,1,1,1;1,0,-1,1;1,-1,0,1;-1,1,1,0];   %  输入二次型矩阵
[P,D]=eig(A)                              %  求矩阵 A 的特征值和特征向量
%求得结果
P =
    0.8125    0.2326    0.5116    0.7830
    0.3366   -0.5615   -0.2953    0.5919
    0.3366   -0.5615    0.8069    0.1911
   -0.3366    0.5615    0.0000    0.0000
D =
    0.4142         0         0         0
         0   -2.4142         0         0
         0         0    1.0000         0
         0         0         0    1.0000
```

%P 就是所求的正交矩阵，使得 $P^T AP = D$，令 $x = py$，其中 $x = (x_1 \ \cdots \ x_4)^T$，$y = (y_1 \ \cdots \ y_4)^T$

```
a=sym('[0,1,1,-1;1,0,-1,1;1,-1,0,1;-1,1,1,0]');     %求正交矩阵的精确解
[v,d]=eig(a)                                         %求得 v，d
v =
[  1,   1,   1, -1]
[ -1,   1,   0,  0]
[ -1,   0,   1,  0]
[  1,   0,   0,  1]
d =
[ -3,   0,   0,  0]
[  0,   1,   0,  0]
[  0,   0,   1,  0]
[  0,   0,   0,  1]
```

syms y1 y2 y3 y4   %定义符号变量 y_1，y_2，y_3，y_4

```
f=[y1,y2,y3,y4]*d*[y1;y2;y3;y4]
f =
```

y1^2+y2^2+y3^2-3*y4^2   %化简后的二次型为 $g = y_1^2 + y_2^2 - 3y_3^2 + y_4^2$

【例 7.29】利用 MATLAB 工具分析二次型 $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$ 的正定性及其对应的二次曲面

【解】应用 Matlab 软件求解此题的结果如下，二次型 f 的图形如图 7-2 所示..

在 MATLAB 命令窗口中输入如下内容:

```
A=[3 2;2 -2];                          % 输入二次型矩阵
lamda=eig(A)                           % 求 A 特征值
lamda =                                % 特征值不全为正，不是正定
     3.7016
     -2.7016
ezmesh('3*x1^2+4*x1*x2-2*x2^2');       % 绘制二次型的对应的二次曲面
```

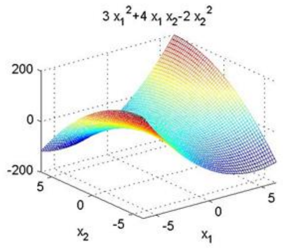


图 7-2

二、 回顾和小结

1. 二次型与二次曲线的关系

2. 如何用计算软件解决二次型相关问题;

三、 复习思考与作业

思考题:

将二次曲面方程化简

$$S: F(x,y,z)=x^2+y^2+5z^2-6xy+2xz-2yz-4x+8y-12z+14=0,$$

判断其为何种二次曲面.

作业题:

通过北化在线平台发布作业和在线测试

第（28）次授课

<table>
<tr><td>教学章节</td><td>复习总结</td><td>学时</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>教材和
参考书</td><td colspan="3">19. 姜广峰，崔丽鸿 《线性代数》 高等教育出版社，2015 ；（教学用书）
20. 崔丽鸿,姜广峰《线性代导学备考一书通》化学工业出版社,2014.（习题课用书）
21. David.C.Lay，线性代数及其应用(英文版)，电子工业出版社，2010.（教学参考）
22. Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, Wellesley Cambridge Press，2009. （教学参考）
23. Jim Hefferon，Linear Algebra, available for free online，2014.（教学参考）
24. 黄廷祝，成孝予，线性代数与空间解析几何，高等教育出版社，2008. （教学参考）
刘三阳等，线性代数，高等教育出版社，2009. （教学参考）</td></tr>
<tr><td colspan="4">10.教学目的：复习总结第 1-7 章内容
11.教学重点：相关概念、定理以及计算方法
12.教学难点：七章内容中的定理与计算</td></tr>
<tr><td colspan="4">13.教学内容：1-7 章内容；
14. 时间安排：2 学时；
15. 教学方法：讲授与讨论相结合；
16. 教学手段：黑板讲解与多媒体演示，雨课堂互动，MOOC 平台讨论+测试。</td></tr>
<tr><td colspan="4">教学设计：
课前：布置预习任务（提出问题，让学生针对问题进行学习和分析)：
1.复习 1-7 章；
课中检测，并探讨重点、难点知识点
多种形式的课堂讨论：
① 对哪一部分比较难理解或者未掌握？
课后：(互动过程中及时反馈、及时评价，客观、高效地及时反映学生学习情况）
1.布置书后作业，北化在线平台提交；</td></tr>
</table>

2.在北化在线平台完成课后测试；

3.在微信群、企业微信群、MOOC 平台、线下随时回答解决同学的问题；

基本内容	教学反思
一、 复习讲解 **第 1-5 章阶段性总结：** **第 1 章内容提要和常见题型** **知识点：** 1、矩阵的定义 2、几种特殊的矩阵 3、矩阵的加法、数乘、乘法、幂与多项式 4、矩阵的转置 5、对称与反对称矩阵 **注意点：** 1、两矩阵可以相乘的条件 2、矩阵的乘法不满足交换律 3、矩阵的乘法不满足消去律 4、AE=EA=A 5、矩阵多项式中常数项的写法 6、矩阵乘积的转置—反序律 **常见题型：** 1、矩阵的运算 2、求矩阵的幂 3、求逆矩阵 4、解矩阵方程 5、有关特殊分块矩阵的题目 6、有关初等变换与初等矩阵的题目 **第 2 章内容提要和常见题型** **知识点：** 8、行列式的定义 9、行列式的性质 10、 余子式与代数余子式 11、 行列式展开定理 12、 方阵的行列式 13、 伴随矩阵 14、 矩阵可逆的充要条件 **注意点：** 7、行列式的拆分性质 8、行列式展开法则的应用	课中提问讨论各个章节的相关概念和计算方法等

9、常用的特殊行列式 10、　　方阵行列式的性质 11、　　伴随矩阵的定义 12、　　伴随矩阵的万能公式 **常见题型：** 1、低阶行列式的运算 2、一般行列式的计算 3、方阵的行列式 4、伴随矩阵性质的应用 **第 3 章内容提要和常见题型** **知识点：** 6、矩阵秩的定义 7、秩的性质 8、秩的求法 9、齐次线性方程组解的判定与求解 10、　　非齐次线性方程组的解的判定与求解 **注意点：** 1、齐次、非齐次线性方程组解的情况判定等价条件 2、行阶梯型矩阵 3、行简化阶梯型矩阵 4、始终如一用行初等变换 **常见题型：** 1、求秩相关题目 2、方程组求解 3、带参数的方程组解的讨论 **第 4 章内容提要和常见题型** **知识点：** 1、向量的概念和计算 2、线性相关、无关以及表示的定义 3、向量组的等价 4、向量组的秩 5、极大无关组 **注意点：** 1、线性相关、无关以及表示的等价命题 2、两个等价向量的矩阵表示 3、向量组等价与矩阵等价的区别 4、向量组的秩与矩阵的秩的联系 **常见题型：** 6、向量组线性相关性的判定、证明、反问题。 7、求向量组的秩、极大无关组以及用极大无关组表示其余向量 8、两个向量组的线性表示的判定、证明、反问题 9、求向量在基下的坐标	

10、　求两组基的过度矩阵

第 5 章内容提要和常见题型

知识点：

1、齐次线性方程组解的性质、基础解系

2、非齐次线性方程组解的性质、结构

注意点：

4、线性方程组的三种等价形式

5、齐次与非齐次线性方程组的解的关系

6、基础解系、基、极大无关组的联系

常见题型：

1、求齐次、非齐次方程组的基础解系

2、已知解的情况，求方程组中的未知参数

第 6 章内容提要和常见题型

知识点：

1、特征值与特征向量的概念、性质；

2、相似矩阵的概念性质；

3、矩阵相似对角化的条件和方法

4、实对称矩阵的相似对角化

注意点：

1、特征值与特征向量的求解

2、特征项量均为非零的

3、并不是所有矩阵都可相似对角化

4、实对称矩阵一定能相似对角化

常见题型：

1、求矩阵的特征值与特征向量

2、已知特征值或特征向量求矩阵中的参数

3、求矩阵的相似对角化

4、已知与矩阵相似的对角阵，求原矩阵

第 7 章内容提要和常见题型

知识点：

1、二次型与对应矩阵的概念

2、化二次型为标准形的三种方法

3、二次型的正负惯性指数和规范形

4、二次型的正定性

注意点：

1、二次型的矩阵都是实对称的

2、二次型都可以经过正交相似变换为标准形

3、二次型不一定都是正定的

4、二次型的标准形不唯一，但规范形是唯一的

5、矩阵等价、相似于合同的区别与联系

常见题型：

1、求二次型的标准形

2、求二次型的正负惯性指数和规范形 3、已知二次型的标准形，求原二次型中的参数	

矩阵中的“0”和“1”

一、什么是矩阵中的“0”？

零矩阵O：所有元素全为零的矩阵

- 零矩阵不唯一
  - ✅ 不同型的零矩阵不相等
  - ❎ 任何两个零矩阵都相等
- 相关的算律
  - ❶ A+O=A
  - ❷ A+（-A）=0
  - ❸ AO=O
  - ❹ AB=O未必有A=O或B=O
  - ❺ AB=AC未必有A=B
    - A非零时成立吗？
    - A可逆时成立吗？

一、什么是矩阵中的“1”？

单位矩阵E：对角元全为1的对角矩阵

- 单位矩阵不唯一
  - AE=EA=A
  - 初等矩阵：单位矩阵施行一次初等变换得到的矩阵
- 若AB=E，则AB互逆
  - 若AA的转置=E，则A为正交矩阵
  - |A+E|=0，则-1为A的一个特征值

矩阵“1”的引申意义，请同学们积极探讨

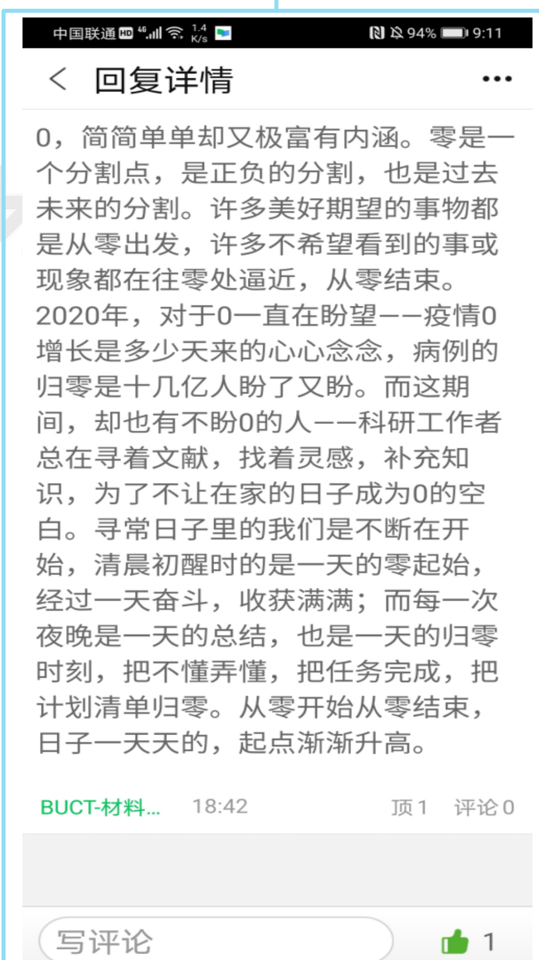
矩阵“0”的引申

- 1阶零矩阵等同于数0
  - 起点
  - 没有
  - 占位
  - 精度
  - 哲理
  - 科学意义
- 2阶及以上的零矩阵
  - 集体观

新冠防疫中的最美的数字：清零！还记得吗？2020年3月湖北武汉疫情逐步清零，著名主持人白岩松央视新闻中讲到：

2020年
你最喜欢的数字是什么？
相信很多中国人
最喜欢的数字就是 0
它代表着健康、平安
今日春分
桃花灼灼，杨柳青青
湖北连续两日病例0新增
好消息陆续传来
0和春天，都让大家久等了
（以上转自央视新闻）

0，这个春天最美数字！众志成城，抗击疫情，让我们继续加油！请同学们结合疫情及线上教学，谈谈对矩阵“0”的认识吧，谢谢！



13. 申报一流课程时的说课视频（剪辑前的，12 分钟）