稳定性模型

稳定性模型

- 对象仍是动态过程，而建模目的是研究时间充分长以后过程的变化趋势 ——平衡状态是否稳定。

- 不求解微分方程，而是用微分方程稳定性理论研究平衡状态的稳定性。

1　捕鱼业的持续收获

背景

- 再生资源（渔业、林业等）与
  非再生资源（矿业等）
- 再生资源应适度开发——在持续稳产前提下实现最大产量或最佳效益。

问题及分析

- 在捕捞量稳定的条件下，如何控制捕捞使产量最大或效益最佳。
- 如果使捕捞量等于自然增长量，渔场鱼量将保持不变，则捕捞量稳定。

$x(t)$ ~ 渔场鱼量

假设

• 无捕捞时鱼的自然增长服从 Logistic规律

$$\dot{x}(t) = f(x) = rx(1-\frac{x}{N})$$

r~固有增长率, N~最大鱼量

• 单位时间捕捞量与渔场鱼量成正比

$h(x)=Ex$, E~捕捞强度

建模

记 $F(x) = f(x) - h(x)$

捕捞情况下渔场鱼量满足

$$\dot{x}(t) = F(x) = rx(1-\frac{x}{N}) - Ex$$

• 不需要求解$x(t)$, 只需知道$x(t)$稳定的条件

复习：一阶微分方程的平衡点及其稳定性

$$\dot{x}=F(x) \quad (1)$$ 一阶非线性（自治）方程

$F(x)=0$的根x_0~微分方程的平衡点 $\left.\dot{x}\right|_{x=x_0}=0 \Rightarrow x\equiv x_0$

设$x(t)$是方程的解，若从x_0某邻域的任一初值出发，

都有 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=x_0$，称$x_0$是方程(1)的稳定平衡点

不求$x(t)$, 判断x_0稳定性的方法——直接法

(1)的近似线性方程 $$\dot{x}=F'(x_0)(x-x_0) \quad (2)$$

$F'(x_0)<0 \Rightarrow x_0$稳定(对(2),(1))

$F'(x_0)>0 \Rightarrow x_0$不稳定(对(2),(1))

产量模型

$$\dot{x}(t) = F(x) = rx\left(1-\frac{x}{N}\right) - Ex$$

$$F(x)=0 \quad \xrightarrow{\text{平衡点}} \quad x_0 = N\left(1-\frac{E}{r}\right), \; x_1 = 0$$

稳定性判断

$$F'(x_0) = E - r, \quad F'(x_1) = r - E$$

$$E < r \Rightarrow F'(x_0) < 0, F'(x_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0\text{稳定}, x_1\text{不稳定}$$

$$E > r \Rightarrow F'(x_0) > 0, F'(x_1) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0\text{不稳定}, x_1\text{稳定}$$

***E*~捕捞强度** **r~固有增长率**

x_0 稳定, 可得到稳定产量

x_1 稳定, 渔场干枯

产量模型

在捕捞量稳定的条件下，
控制捕捞强度使产量最大

图解法

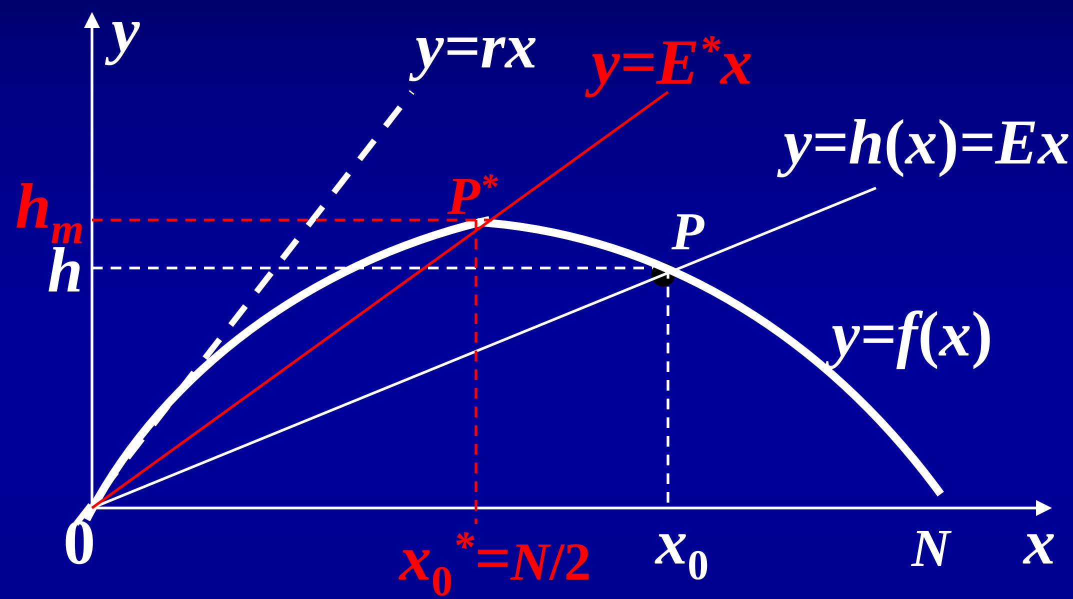
$$F(x) = f(x) - h(x)$$

$$f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{N}\right)$$

$$h(x) = Ex$$

$F(x) = 0 \Rightarrow$ f 与 h 交点 P

$E < r \Rightarrow x_0$稳定



P的横坐标 x_0~平衡点　　P的纵坐标 h~产量

产量最大　$P^*(x_0^* = N/2, h_m = rN/4)$　$E^* = h_m / x_0^* = r/2$

控制渔场鱼量为最大鱼量的一半

效益模型

在捕捞量稳定的条件下，控制捕捞强度使效益最大.

假设

- 鱼销售价格p
- 单位捕捞强度费用c

收入 $T = ph(x) = pEx$ 　　支出 $S = cE$

单位时间利润 $R = T - S = pEx - cE$

稳定平衡点 $x_0 = N(1 - E/r)$

$$R(E) = T(E) - S(E) = pNE(1 - \frac{E}{r}) - cE$$

求E使$R(E)$最大

$$E_R = \frac{r}{2}(1 - \frac{c}{pN}) < E^* = \frac{r}{2}$$

渔场鱼量

$$x_R = N(1 - \frac{E_R}{r}) = \frac{N}{2} + \frac{c}{2p} \qquad h_R = \frac{rN}{4}(1 - \frac{c^2}{p^2N^2})$$

捕捞过度

- 封闭式捕捞追求利润$R(E)$最大

$$E_R = \frac{r}{2}\left(1-\frac{c}{pN}\right)$$

- 开放式捕捞只求利润$R(E) > 0$

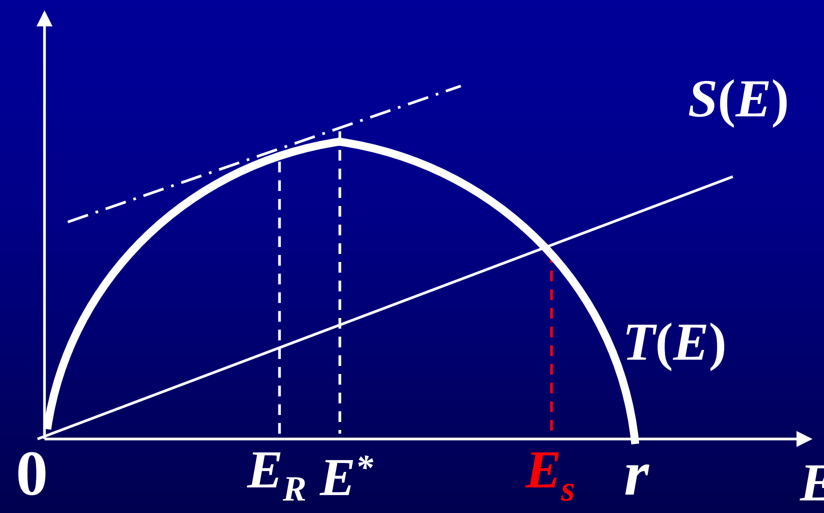
$$R(E) = T(E) - S(E) = pNE\left(1-\frac{E}{r}\right) - cE \overset{令}{=\!=} 0 \quad \Rightarrow \quad E_s = r\left(1-\frac{c}{pN}\right)$$

$R(E)=0$时的捕捞强度(临界强度) $E_s=2E_R$

临界强度下的渔场鱼量

$$x_s = N\left(1-\frac{E_s}{r}\right) = \frac{c}{p}$$

$$p\uparrow, c\downarrow \quad \Rightarrow \quad E_s\uparrow, x_s\downarrow$$



捕捞过度

2　种群的相互竞争

• 一个自然环境中有两个种群生存，它们之间的关系：相互竞争；相互依存；弱肉强食。

• 当两个种群为争夺同一食物来源和生存空间相互竞争时，常见的结局是，竞争力弱的灭绝，竞争力强的达到环境容许的最大容量。

• 建立数学模型描述两个种群相互竞争的过程，分析产生这种结局的条件。

- 有甲乙两个种群，它们独自生存时数量变化均服从**Logistic**规律;

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 (1 - \frac{x_1}{N_1}) \qquad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 (1 - \frac{x_2}{N_2})$$

- 两种群在一起生存时，乙对甲增长的阻滞作用与乙的数量成正比；甲对乙有同样的作用。

模型

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \qquad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

对于消耗甲的资源而言，乙(相对于N_2)是甲(相对于N_1) 的 σ_1 倍。

$\sigma_1 > 1$ ⇨ 对甲增长的阻滞作用，乙大于甲

⇨ 乙的竞争力强

模型

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

模型分析

$t \to \infty$时$x_1(t), x_2(t)$的趋向 (平衡点及其稳定性)

(二阶)非线性(自治)方程 $\begin{cases}\dot{x}_1(t) = f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2(t) = g(x_1, x_2)\end{cases}$ 的平衡点及其稳定性

平衡点$P_0(x_1^0, x_2^0)$ ~ 代数方程 $\begin{cases} f(x_1, x_2) = 0 \\ g(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$ 的根

判断$P_0\ (x_1^0, x_2^0)$稳定性的方法——直接法

$$\dot{x}_1(t) = f(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2(t) = g(x_1, x_2) \quad (1)$$

(1)的近似线性方程

$$\dot{x}_1(t) = f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0)$$
$$\dot{x}_2(t) = g_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + g_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0) \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{P_0}$$

$$\begin{cases} \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \\ p = -(f_{x_1} + g_{x_2})\big|_{P_0} \\ q = \det A \end{cases}$$

$\boxed{p > 0 \text{ 且 } q > 0}$

$\boxed{p < 0 \text{ 或 } q < 0}$

平衡点 P_0稳定

平衡点 P_0不稳定

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \qquad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) \equiv r_1 x_1\left(1 - \dfrac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \dfrac{x_2}{N_2}\right) = 0 \\ g(x_1, x_2) \equiv r_2 x_2\left(1 - \sigma_2 \dfrac{x_1}{N_1} - \dfrac{x_2}{N_2}\right) = 0 \end{cases}$$

平衡点：$P_1(N_1, 0),\ P_2(0, N_2),$

$$P_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right), P_4(0,0)$$

仅当$\sigma_1, \sigma_2 < 1$或$\sigma_1, \sigma_2 > 1$时，P_3才有意义

$$\begin{cases} f(x_1,x_2) \equiv r_1 x_1\left(1-\dfrac{x_1}{N_1}-\sigma_1\dfrac{x_2}{N_2}\right) \\ g(x_1,x_2) \equiv r_2 x_2\left(1-\sigma_2\dfrac{x_1}{N_1}-\dfrac{x_2}{N_2}\right) \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} f_{x1} & f_{x2} \\ g_{x1} & g_{x2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_1\left(1-\dfrac{2x_1}{N_1}-\dfrac{\sigma_1 x_2}{N_2}\right) & -\dfrac{r_1\sigma_1 x_1}{N_2} \\ -\dfrac{r_2\sigma_2 x_2}{N_1} & r_2\left(1-\dfrac{\sigma_2 x_1}{N_1}-\dfrac{2x_2}{N_2}\right) \end{bmatrix}$$

$$p=-(f_{x1}+g_{x2})\Big|_{p_i},\quad q=\det A\Big|_{p_i},\quad i=1,2,3,4$$

平衡点 P_i 稳定条件： $p>0$ 且 $q>0$

平衡点	p	q	稳定条件
$p_1(N_1,0)$	$r_1-r_2(1-\sigma_2)$	$-r_1r_2(1-\sigma_2)$	$\sigma_2>1$, $\sigma_1<1$
$p_2(0,N_2)$	$-r_1(1-\sigma_1)+r_2$	$-r_1r_2(1-\sigma_1)$	$\sigma_1>1$, $\sigma_2<1$
$p_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$	$\frac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\frac{r_1r_2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_1<1$, $\sigma_2<1$
$p_4(0,0)$	$-(r_1+r_2)$	r_1r_2	不稳定

P_1, P_2 是一个种群存活而另一灭绝的平衡点

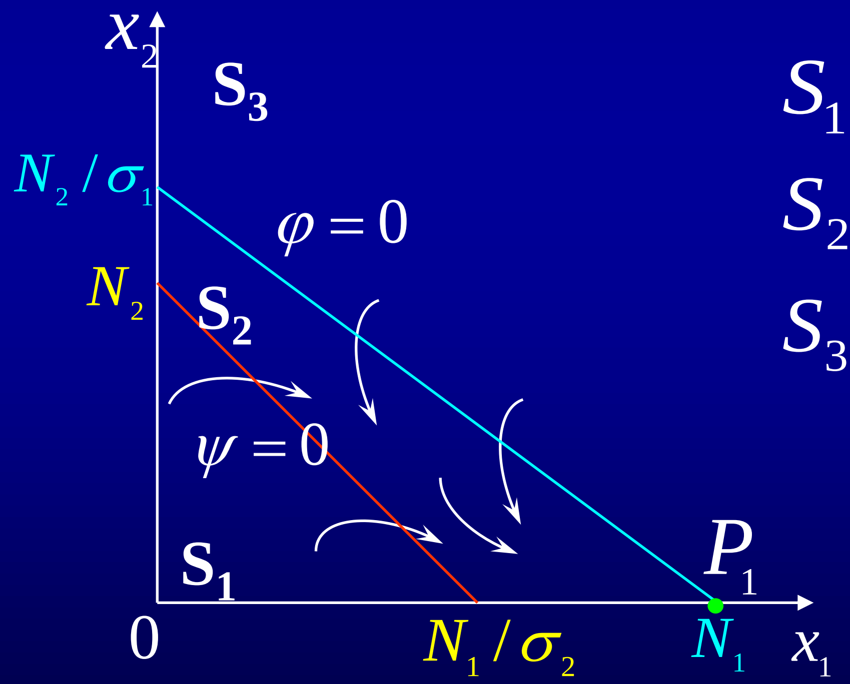
P_3 是两种群共存的平衡点　　P_1稳定的条件 $\sigma_1<1$?

平衡点稳定性的相轨线分析

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right) \qquad \varphi(x_1,x_2)=1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}$$

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right) \qquad \psi(x_1,x_2)=1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}$$

(1) $\sigma_2>1$, $\sigma_1<1$



$$S_1: \varphi>0,\ \psi>0$$

$$\Downarrow$$

$S_1: \dot{x}_1>0,\ \dot{x}_2>0 \Rightarrow t\uparrow \to x_1, x_2\uparrow$

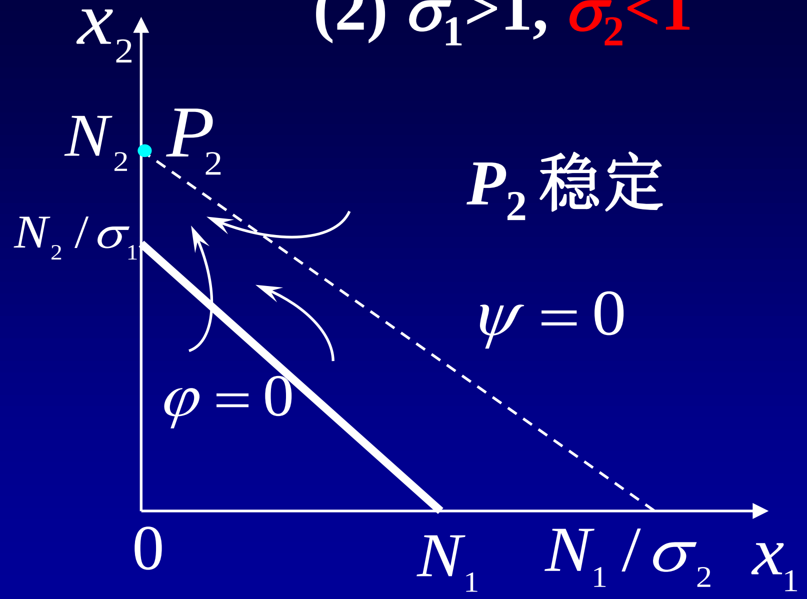
$S_2: \dot{x}_1>0,\ \dot{x}_2<0 \Rightarrow t\uparrow \to x_1\uparrow, x_2\downarrow$

$S_3: \dot{x}_1<0,\ \dot{x}_2<0 \Rightarrow t\uparrow \to x_1, x_2\downarrow$

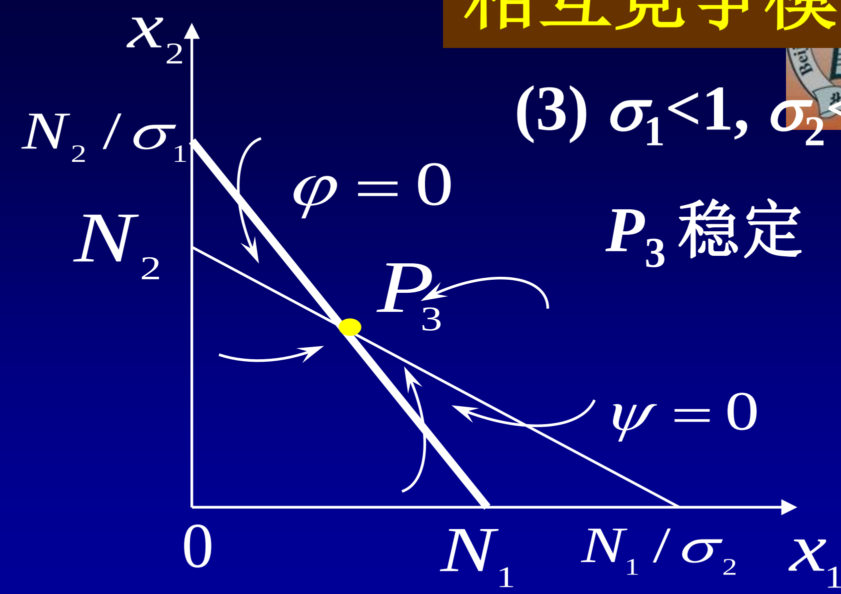
从任意点出发(t=0)的相轨线都趋向$P_1(N_1,0)$ ($t\to\infty$)

$P_1(N_1,0)$是稳定平衡点

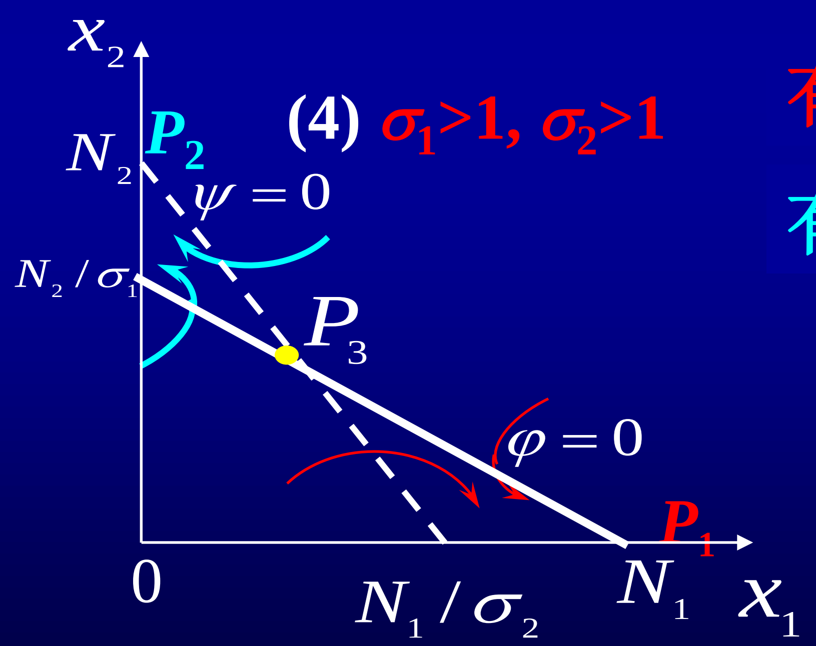
(2) $\sigma_1>1$, $\sigma_2<1$



(3) $\sigma_1<1$, $\sigma_2<1$



(4) $\sigma_1>1$, $\sigma_2>1$



有相轨线趋向P_1

有相轨线趋向P_2

⇨ P_1, P_2都不(局部)稳定

P_1稳定的条件：直接法$\sigma_2>1$

加上与(4)相区别的 $\sigma_1<1$

⇨ P_1全局稳定

结果解释

• P_1稳定的条件：$\sigma_1<1,\ \sigma_2>1$

对于消耗甲的资源而言，乙(相对于N_2)是甲(相对于N_1)的σ_1倍。

$\sigma_1<1$ ⇨ 对甲增长的阻滞作用，乙小于甲 ⇒乙的竞争力弱

$\sigma_2>1$ ⇒甲的竞争力强

甲达到最大容量，乙灭绝

• P_2稳定的条件：$\sigma_1>1,\ \sigma_2<1$

• P_3稳定的条件：$\sigma_1<1,\ \sigma_2<1$

通常$\sigma_1\approx 1/\sigma_2$，$P_3$稳定条件不满足