对坐标的曲面积分的计算法

如果积分曲面 $\Sigma : z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 取上侧, 则

$$\iint_\Sigma R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = +\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

如果积分曲面 $\Sigma : z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 取下侧, 则

$$\iint_\Sigma R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- 若 $\Sigma : x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$, 则有

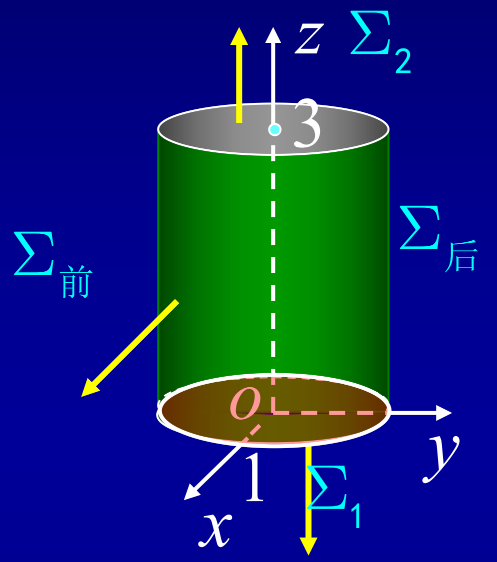
$$\iint_\Sigma P(x, y, z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{(前正后负)}$$

- 若 $\Sigma : y = y(z, x), (z, x) \in D_{zx}$, 则有

$$\iint_\Sigma Q(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x, y(z, x), z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \quad \text{(右正左负)}$$

例1. 计算 $\oiint_{\Sigma}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

其中Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$, $z=3$ 所围空间闭域 Ω 的整个边界曲面的外侧.



解法一：这里 $P=(y-z)x,\quad Q=0,\quad R=x-y$

$$\oiint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma_1}+\oiint_{\Sigma_2}+\oiint_{\Sigma_{前}}+\oiint_{\Sigma_{后}}$$

$$\oiint_{\Sigma_1}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=-\iint_{D_{xy}}(x-y)dxdy=0$$

$$\oiint_{\Sigma_2}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=+\iint_{D_{xy}}(x-y)dxdy=0$$

$$\iint_{\Sigma_{前}} (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

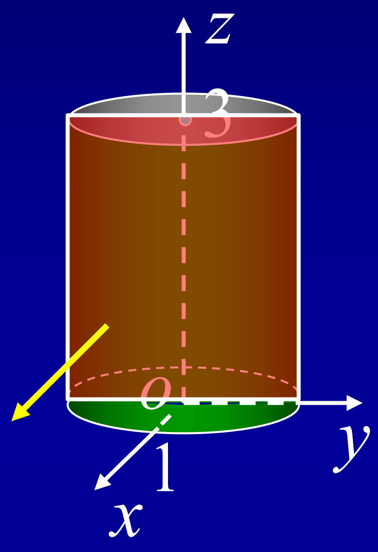
$$= \iint_{\Sigma_{前}} (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_{前}} (y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= 0 + \iint_{D_{yz}} (y-z)\sqrt{1-y^2}\,dydz$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 (y-z)\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy - \int_0^3 zdz \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$= 0 - \frac{9}{2} \times \frac{\pi}{2} = -\frac{9\pi}{4}$$

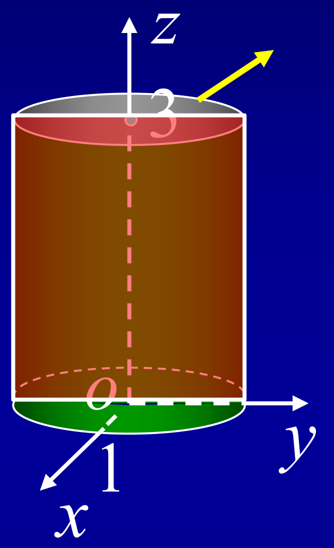


$$\iint_{\Sigma_{后}} (x-y)\,dx\,dy + (y-z)x\,dy\,dz$$

$$= \iint_{\Sigma_{后}} (x-y)\,dx\,dy + \iint_{\Sigma_{后}} (y-z)x\,dy\,dz$$

$$= 0 - \iint_{D_{yz}} (y-z)(-\sqrt{1-y^2})\,dydz$$

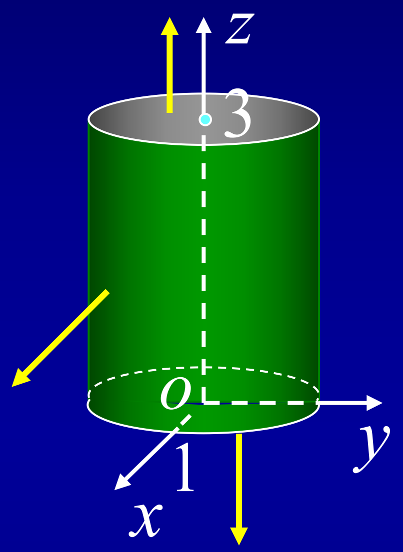
$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 (y-z)\sqrt{1-y^2}\,dy = -\frac{9\pi}{4}$$



$$\therefore \text{原式} = 0 + 0 - \frac{9\pi}{4} - \frac{9\pi}{4} = -\frac{9\pi}{2}$$

例1. 计算 $\iint_{\Sigma}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

其中Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0\,,z=3$ 所围空间闭域 Ω 的整个边界曲面的外侧.



解法二: $P=(y-z)x,\quad Q=0,\quad R=x-y$

原式 $=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$=\iiint_{\Omega}(y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ (用柱坐标)

$=\iiint_{\Omega}(r\sin\theta-z)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^3(r\sin\theta-z)\,\mathrm{d}z=-\frac{9\pi}{2}$

第六节

高斯公式　通量与散度

Green 公式 $\xrightarrow{\text{推广}}$ Gauss 公式

一、高斯公式

二、通量与散度

一、高斯 (Gauss) 公式

高斯，C.F.

定理1. 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面Σ 所围成, Σ 的方向取外侧, 函数 P, Q, R 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \textbf{(Gauss 公式)}$$

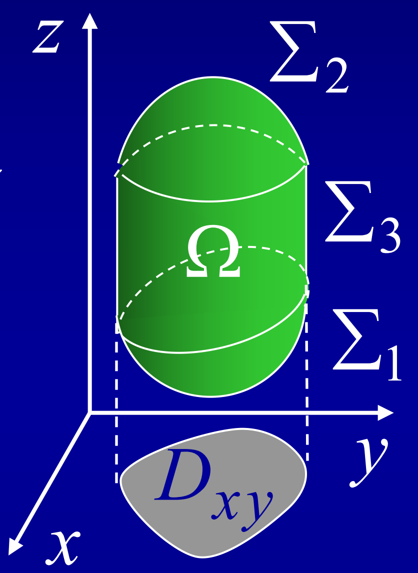
下面先证:

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

证明: 设 $\Omega: z_1(x,y)\le z(x,y)\le z_2(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}$

为XY型区域，$\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3,\ \Sigma_1: z=z_1(x,y),$

$\Sigma_2: z=z_2(x,y)$, 则



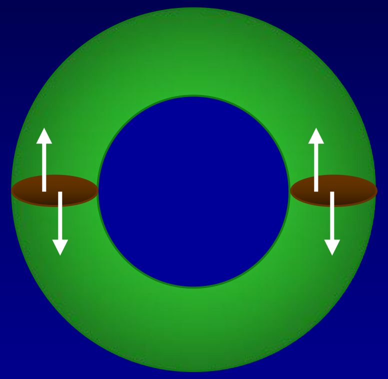
$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{xy}}\{R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\oiint_\Sigma R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\left(\iint_{\Sigma_2}+\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_3}\right)R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_1(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以 $$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



若 Ω 不是 XY–型区域，则可引进辅助面将其分割成若干个 XY–型区域，在辅助面正反两侧面积分正负抵消，故上式仍成立．

类似可证 $$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma} Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

三式相加，即得所证 Gauss 公式：

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

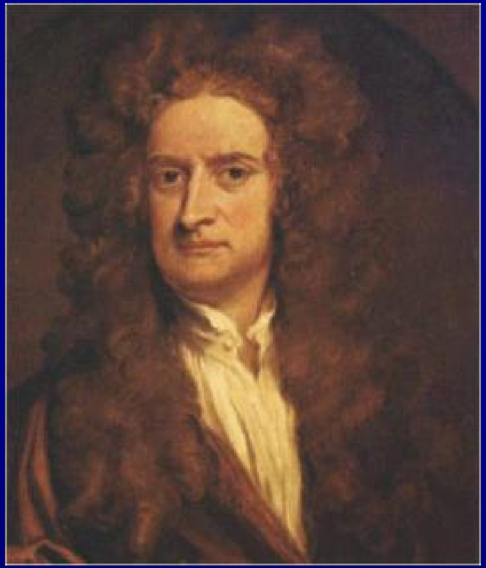
$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(Gauss 公式)

奥斯托洛格拉夫斯基(俄国） (奥-高 公式)

定理证明利用了

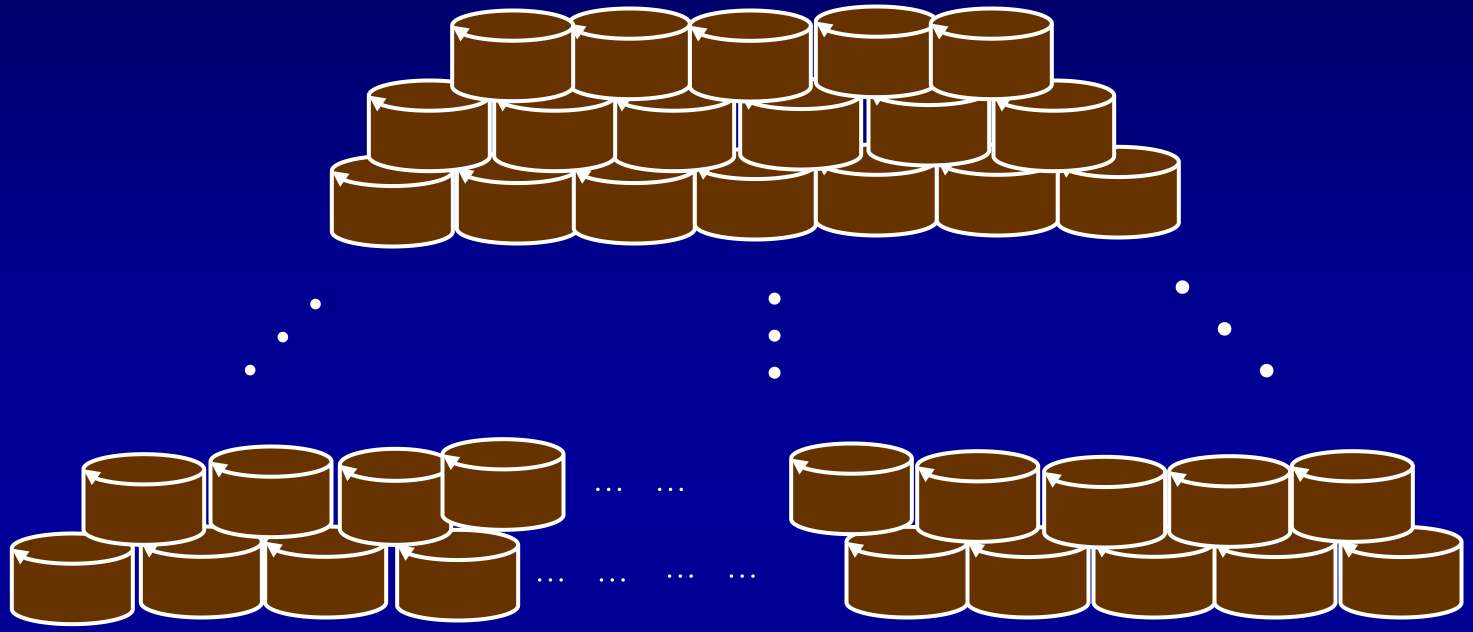
牛顿—莱布尼兹公式



Issac Newton (英）

Gottfried Wilhelm Leibniz(德）

高斯，C.F.



$$N=\frac{n_{\text{顶}}+n_{\text{底}}}{2}\times \text{层数}$$

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 … … … 1

杨辉三角 ⟷ 高斯三角

勾股定理 ⟷ 毕达哥拉斯定理

"科学无国界，科学家有祖国"

——法国科学家巴斯德

科学没有国界，科学家却有国界。

—— 俄国生物学家巴甫洛夫

杨辉，字谦光，汉族，钱塘（今浙江省杭州）人，南宋杰出的数学　家。

他曾担任过南宋地方行政官员，为政清廉，足迹遍及苏杭一带。他在总结民间乘除捷算法、“垛积术”、纵横图以及数学教育方面，均做出了重大的贡献。他是世界上第一个排出丰富的纵横图和讨论其构成规律的数学家。还曾论证过弧矢公式，时人称为“辉术”。与秦九韶、李冶、朱世杰并称“宋元数学四大家”。

主要著有数学著作5种21卷，即《详解九章算法》12卷（1261），《日用算法》2卷（1262），《乘除通变本末》3卷（1274），《田亩比类乘除捷法》2卷（1275）和《续古摘奇算法》2卷（1275）（其中《详解》和《日用算法》已非完书）。后三种合称为《杨辉算法》。朝鲜、日本等国均有译本出版，流传世界。

Gauss 公式：

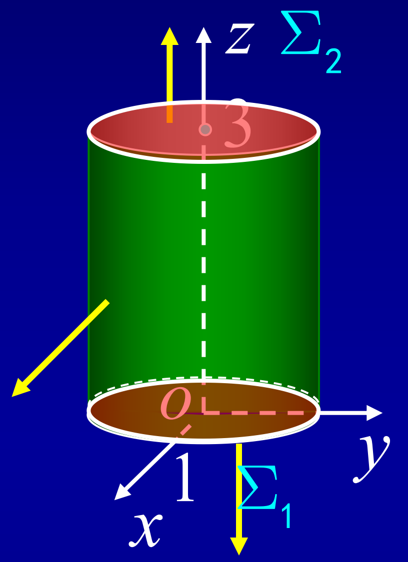
$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

使用时注意条件：

1. 要求偏导数连续（证明中用了牛-莱公式）；
2. 右边的曲面为封闭曲面，且取外侧；
3. 曲面不是封闭曲面时，应该想办法补成封闭曲面（外侧），才能用高斯公式

例1. 用Gauss 公式计算 $\iint_{\Sigma}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

其中Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$, $z=3$ 所围空间闭域 Ω 的整个边界曲面的外侧.



思考: 若 Σ 改为内侧, 结果有何变化?

$$\text{原式}=-\iiint_{\Omega}(y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{9\pi}{2}$$

若 Σ 为圆柱侧面(取外侧) , 如何计算?

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma+\Sigma_{1\text{下}}+\Sigma_{2\text{上}}}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

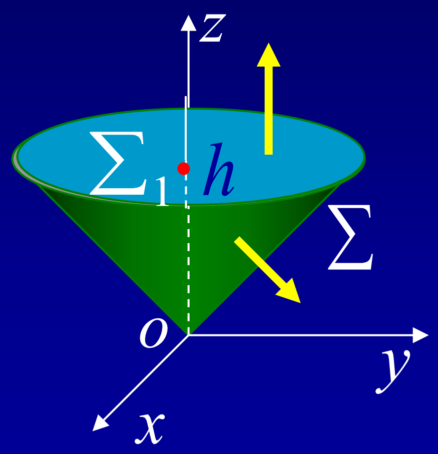
$$-\iint_{\Sigma_{1\text{下}}+\Sigma_{2\text{上}}}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{9\pi}{2}-\left(-\iint_{D_{xy}}(x-y)dxdy\right)-\left(+\iint_{D_{xy}}(x-y)dxdy\right)=-\frac{9\pi}{2}-0-0=-\frac{9\pi}{2}$$

例2. **利用Gauss 公式计算积分**

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于 $z=0$ 及 $z=h$ 之间部分的下侧.



解: 作辅助面

$$\Sigma_1: z=h,\ (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le h^2,\ \text{取上侧}$$

记 Σ,Σ_1 所围区域为 Ω, 则

$\boxed{\text{在 } \Sigma_1 \text{ 上 } \alpha=\beta=\frac{\pi}{2},\gamma=0}$

$$I=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint_{D_{xy}}h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

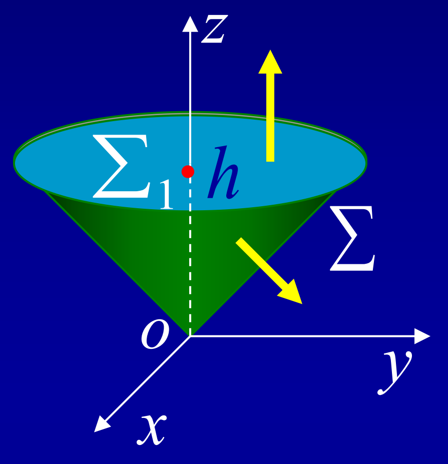
$$I = 2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{D_{xy}} h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

利用重心公式, 注意 $\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$= 2\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \pi h^4$$

$$= 2\int_0^h z\cdot\pi z^2\,\mathrm{d}z - \pi h^4$$

$$= -\frac{1}{2}\pi h^4$$



内容小结

1. 高斯公式及其应用

公式: $$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

应用: (1) 计算曲面积分

(非闭曲面时注意添加辅助面的技巧)

(2) 推出闭曲面积分为零的充要条件:

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$