# 第二节

# 一阶常微分方程

# 1. 可分离变量方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x)\, f_2(y)$$

$$M_1(x)M_2(y)\,\mathrm{d}x + N_1(x)\;N_2(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\Big\downarrow \text{转化}$$

解分离变量方程 $g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$

## 分离变量方程的解法:

$$g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x \qquad ①$$

设 $y=\varphi(x)$ 是方程①的解, 则有恒等式

$$g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \equiv f(x)\,\mathrm{d}x$$

两边积分, 得 $$\underbrace{\int g(y)\,\mathrm{d}y}_{G(y)} = \underbrace{\int f(x)\,\mathrm{d}x}_{F(x)}$$

则有 $$G(y) = F(x) + C \qquad ②$$

当 $G(y)$ 与 $F(x)$ 可微且 $G'(y)=g(y)\neq 0$ 时, 上述过程可逆, 说明由②确定的隐函数 $y=\Phi(x)$ 是①的解. 同样,当 $F'(x)=f(x)\neq 0$ 时, 由②确定的隐函数 $x=\psi(y)$ 也是①的解.

称②为方程①的隐式通解, 或通积分.

例1. **求微分方程** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 y$ 的通解.

**解:** 分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y} = 3x^2\,\mathrm{d}x$

**说明:** 在求解过程中每一步不一定是同解变形, 因此可能增、减解.

两边积分 $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 3x^2\,\mathrm{d}x$

得 $\ln|y| = x^3 + C_1$

或

$$\boxed{\ln|y| = x^3 + \ln|C|}$$

即 $y = \pm e^{x^3 + C_1} = \pm e^{C_1} e^{x^3}$

令 $C = \pm e^{C_1}$

$y = C e^{x^3}$ （ $C$ 为任意常数 ）

( 此式含分离变量时丢失的解 $y = 0$ )

例2. 解初值问题

$$\begin{cases} xy\,\mathrm{d}x + (x^2+1)\,\mathrm{d}y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解：分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y| = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \ln|C|$

即 $y\sqrt{x^2+1} = C$ （$C$ 为任意常数）

由初始条件得 $C = 1$，故所求特解为

$$y\sqrt{x^2+1} = 1$$

例3. **求下述微分方程的通解:**

$$y' = \sin^2(x - y + 1)$$

**解:** 令 $u = x - y + 1$, 则

$$u' = 1 - y'$$

故有 $$1 - u' = \sin^2 u$$

即 $$\sec^2 u \, \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

解得 $$\tan u = x + C$$

所求通解: $\tan(x - y + 1) = x + C$ （ $C$ 为任意常数 ）

练习：求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^{x+y}$ 的通解.

**解法 1** 分离变量 $e^{-y}\,\mathrm{d}y=e^{x}\,\mathrm{d}x$

$$-e^{-y}=e^{x}+C$$

即 $(e^{x}+C)e^{y}+1=0 \quad (\,C<0\,)$

**解法 2** 令 $u=x+y$, 则 $u'=1+y'$

故有 $u'=1+e^{u}$

积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{1+e^{u}}=x+C$

$$\boxed{\int\frac{(1+e^{u})-e^{u}}{1+e^{u}}\,\mathrm{d}u}$$

$$u-\ln(1+e^{u})=x+C$$

所求通解: $\ln(1+e^{x+y})=y-C$ ( $C$ 为任意常数 )

例4. 已知放射性元素铀的衰变速度与当时未衰变原子的含量 $M$ 成正比，已知 $t=0$ 时铀的含量为 $M_0$，求在衰变过程中铀含量 $M(t)$ 随时间 $t$ 的变化规律.

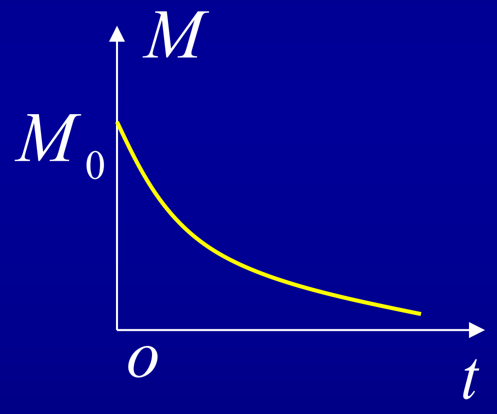
**解:** 根据题意，有 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\lambda M \quad (\lambda > 0) \\ M\big|_{t=0} = M_0 \quad \text{(初始条件)} \end{cases}$

对方程分离变量，然后积分: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}M}{M} = \int (-\lambda)\,\mathrm{d}t$

得 $\ln M = -\lambda t + \ln C$，即 $M = C e^{-\lambda t}$

利用初始条件，得 $C = M_0$

故所求铀的变化规律为 $M = M_0 e^{-\lambda t}$.



例5. 设降落伞从跳伞塔下落后所受空气阻力与速度成正比，并设降落伞离开跳伞塔时( $t=0$ ) 速度为0，求降落伞下落速度与时间的函数关系.

**解:** 根据牛顿第二定律列方程 $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv$

初始条件为 $v\big|_{t=0}=0$

对方程分离变量，然后积分：$\int\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\int\frac{\mathrm{d}t}{m}$

得 $-\frac{1}{k}\ln(mg-kv)=\frac{t}{m}+C$ (此处 $mg-kv>0$)

利用初始条件，得 $C=-\frac{1}{k}\ln(mg)$

代入上式后化简，得特解 $v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$

$t$ 足够大时

$v\approx\frac{mg}{k}$

讨论：实际中，高空跳伞降到一定高度后才打开伞，相应的落地速率如何？

$$v\big|_{t=0}=v_0, \qquad -\frac{1}{k}\ln(mg-kv)=\frac{t}{m}+C \qquad \Rightarrow C=-\frac{1}{k}\ln(mg-kv_0)$$

$$v=\frac{mg}{k}-\frac{|mg-kv_0|}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$$

如果$v_0>\dfrac{mg}{k}$, $\qquad -\dfrac{1}{k}\ln(kv-mg)=\dfrac{t}{m}+C \qquad \Rightarrow C=-\dfrac{1}{k}\ln(kv_0-mg)$

$$v=\frac{mg}{k}-\frac{kv_0-mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$$

只要降落伞打开后时间充分，落地速率约为 $v=\dfrac{mg}{k}$

# 共和国的人民不会忘记

2008年“5、12”汶川地震，汶川、茂县因通讯中断、道路受阻，而成为一座“孤城”，救援行动被迫中止，可是余震还在不断发生，救援行动迫在眉睫。空降兵15名战士自动请缨，挺身而出，从近5000米高空盲跳，一跃而下空降灾区，数万群众得以得救。

## 内容小结

1. 微分方程的概念

微分方程; 阶; 定解条件; 解; 通解; 特解

**说明:** 通解不一定是方程的全部解 .

例如, 方程 $(x+y)\,y'=0$ 有解

$$y=-x \quad 及 \quad y=C$$

后者是通解 , 但不包含前一个解 .

2. 可分离变量方程的求解方法:

分离变量后积分; 根据定解条件定常数 .

## 3. 解微分方程应用题的方法和步骤

(1) 找出事物的共性及可贯穿于全过程的规律列方程.

**常用的方法:**

1) 根据几何关系列方程

2) 根据物理规律列方程

3) 根据微量分析平衡关系列方程 ( 如: 例6 )

(2) 利用反映事物个性的特殊状态确定定解条件.

(3) 求通解, 并根据定解条件确定特解.

## 思考与练习

1. 求下列方程的通解 :

(1) $(x+xy^2)\,\mathrm{d}x-(x^2y+y)\mathrm{d}y=0$

(2) $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$

**提示: (1)** 分离变量 $\dfrac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

**(2)** 方程变形为 $y'=-2\cos x\sin y$

$$\Longrightarrow \ln\left|\tan\frac{y}{2}\right|=-2\sin x+C$$

## 2. 试考察患病病人数的变化规律建立模型描述传染病的传播

- 按照传播过程的一般规律，用机理分析方法建立模型

**模型1** 已感染人数 (病人) $i(t)$

**假设**

- 每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为$\lambda$

**建模**

$$i(t+\Delta t)-i(t)=\lambda i(t)\Delta t$$

$\Rightarrow$

$$\frac{di}{dt}=\lambda i$$
$$i(0)=i_0$$

$$i(t)=i_0 e^{\lambda t}$$

$\Rightarrow$ $t\to\infty \Rightarrow i\to\infty$ ？

若有效接触的是病人，则不能使病人数增加 $\Rightarrow$ 必须区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

## 模型2　区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

SI 模型

**假设**

1）总人数$N$不变，病人和健康人的 比例分别为 $i(t), s(t)$

2）每个病人每天有效接触人数为$\lambda$, 且使接触的健康人致病

$\lambda$ ~ 日接触率

**建模**

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=[\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$$

$$\frac{di}{dt}=\lambda si$$

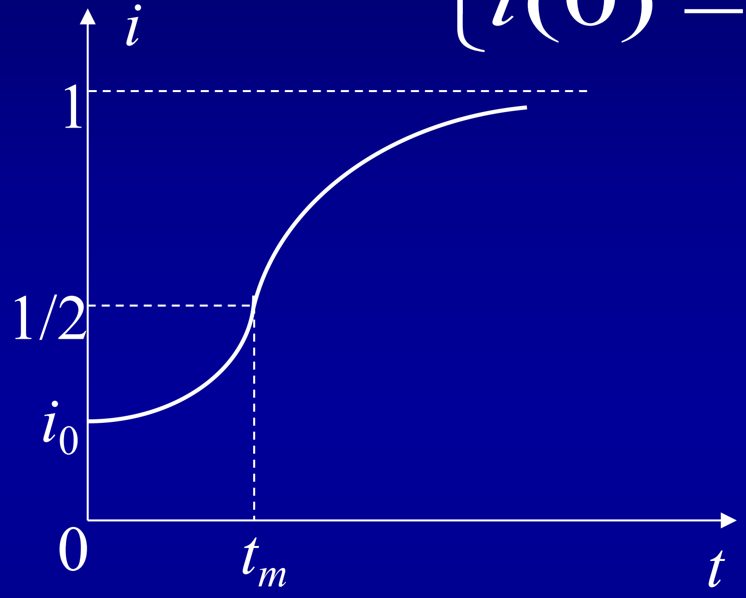
$$s(t)+i(t)=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i) \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

模型2

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

⇨ Logistic 模型




$$i(t) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}}$$

$t=t_m$, $di/dt$ 最大

$$t_m = \lambda^{-1}\ln\left(\frac{1}{i_0}-1\right)$$

$t_m$~传染病高潮到来时刻

$t \to \infty \Rightarrow i \to 1$ ？

$\lambda$ (日接触率)↓ → $t_m$↑

适用范围？

我国的做法：党和国家以人民为中心，高度重视，群防群控！病毒传播得到有效控制！

某国的“反智”行为导致感染和死亡人数至今高悬不下！



# 作业

P 308　1 (1) , (5) , (7) , (10);

2 (3), (4) ;　3 ; 6